Institut de **R**echerche en **E**ducation des **M**athématiques
Aix-Marseille Université, Groupe Collège

AU HASARD

Notes : cycle 0 et plus tard en classe de Seconde

1. Au hasard.

NB: CES NOTES PROLONGENT L'EXPÉRIENCE D'ATELIERS POUR ENFANTS AU MUSÉE DE LA VIEILLE CHARITÉ (MARSEILLE) EN PRÉPARATION D'UN PARCOURS PÉDAGOGIQUE AU LYCÉE ADAM DE CRAPONNE À SALON-DE-PROVENCE.

JOUER-OBSERVER-DESSINER-DISCUTER

Le hasard est cet incertain en attente d'une concrétisation qui le rendra certitude. En attendant, les sciences, de la mathématique à la physique et jusqu'à la médecine ou la sociologie quantifient les possibles pour anticiper sur l'avenir.

Les jeux sont à la source des probabilités. En ce sens un atelier qui explore des jeux pour observer le hasard n'est qu'un retour aux sources. Comme dans le parcours AL-JABR, "LE BONHEUR EST DANS LES DÉS".

N.B. Á l'origine ce parcours est testé dans un contexte multidisciplinaire art sciences avec des enfants entre 7 et 12 ans (ateliers PollyMaggoo aux Musées de Marseille à La Vieille Charité en marge de l'exposition Par Hasard). http://pollymaggoo.org/

Deux ateliers ont eu lieu le mercredi 23 octobre 2019, deux autres le vendredi 3 janvier 2020 et encore deux auront lieu le mercredi 19 février 2020. Une séance de rendu "en présence des parents" aura lieu le samedi 22 février 2020 après-midi. Inscriptions possibles (04 91 14 58 52 / 23).

Dans chaque atelier interviennent une animatrice cinéma qui guide les interventions d'arts plastiques des enfants sur une pellicule argentique et un mathématicien pour la partie jeux de dés.

Au cours de chaque atelier l'animateur mathématique a alterné des interventions collectives vers le groupe avec des discussions personnelles. Cette stratégie était performante pour deux raisons: permettre l'hétérogénéité des questions car l'âge des participants allait de 7 à 12 ans et même pour 2 enfants du même âge, les questions posées étaient très différentes et par ailleurs favoriser le libre accès de chacun_e au travail artistique sur la pellicule.

2. Deux dés: la magie du 7. Carnet de Route.

1. Tirage avec deux dés simultanément.

Chaque enfant avait à sa disposition un petit gobelet en couleur et deux dés de couleurs différentes. Ils devaient annoncer la somme des deux dés après chaque tirage. Par ailleurs ces tirages donnaient a chacun_e matière à intervenir de façon très libre sur la pellicule, une longue bande de celluloïd vierge 35mm, commune à tout le groupe.

Les résultats étaient comptabilisés au tableau par l'animateur au fur et à mesure. Très vite il est apparu que les probabilités n'étaient pas uniformes.

Plusieurs raisons ont été avancées pour "expliquer" le surnombre du 7:

- La forme du gobelet?

- Le décompte des possibilités?, ... mais si les deux dés étaient blancs est-ce que le nombre de configurations "différentes" serait le même?

- Le coup de main pipé des joueurs?

- Le 7 est un nombre impair.

Chaque hypothèse a été âprement discutée.

Mais chaque fois l'hypothèse du décompte des possibilités pour chaque valeur de la somme a pris le dessus. Une manipulation des deux dés en cherchant volontairement (sans lancer) toutes les possibilités d'obtenir une somme fixée a aidé à comprendre le résultat, surtout pour les plus petits. Dont certains devaient compter sur les doigts pour calculer la somme (notez la 3ème photo dans le 3ème rang!).

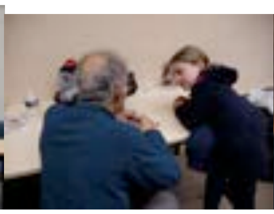
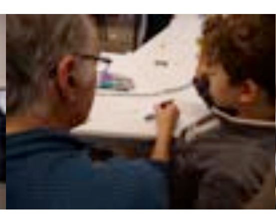
Dans le décompte de toutes les configurations il a fallu réaliser que (3 et 4) n'est pas (4 et 3). Ici la couleur des dés aide à l'observation. Il faut laisser tranquillement chacun se convaincre qu'il a réalisé toutes les possibilités pour chaque somme donnée. Notons que cette question n'a pas une réponse triviale, loin delà. En fait nous pouvons même affirmer que la vrai réponse est de le vérifier avec l'expérience. Notons encore pour les incrédules que dans le cas des systèmes quantiques le mode de calcul de la probabilité d'un événement peut ne pas distinguer "3 et 4" de "4 et 3" (bosons).

matériel:  total = 3 ou 7: 

Une discussion à la fin a permis de constater que le résultat (sur environs 50 tirages) était en bon accord avec les prévisions théoriques. Et en particulier confirmer la façon de calculer le dénombrement des configurations.







2. Dés dodécaédriques.

Les dés cubiques et les dés dodécaédriques: deux hasards différents sur (presque) le même ensemble (2 à 12 ou 1 à 12). Les résultats avec les dés dodécaédriques mis en regard au tableau montrent une statistique uniforme très différente de la précédente. La découverte de l'existence de dés dodécaédriques a fait sensation!

Film et hasard:  

3. Probabilité Conditionnelle.

N.B. Eu égard aux très courtes durées de chaque atelier à la Vieille Charité cette idée n'a pas pu être abordée. Nous la notons ici comme un début de sentier qui veut bifurquer, préparant des parcours IREM plus vastes en classe au collège ou au lycée. Ce texte est juste un panneau "*par là il y aura à voir*":

Une situation nouvelle consiste à décomposer le tirage en deux étapes: un dé d'abord et l'autre après. Á moins de penser que les deux dés "communiquent" quand ils sont tirés ensemble, ce qu'on peut discuter, le résultat au final doit être identique dans les tirages synchrones et dans les tirages asynchrones. Mais en échelonnant les jetés nous pouvons repenser la probabilité au moment où le résultat du premier dé est connu mais le deuxième n'est pas encore lancé. C'est ce qu'on appelle la probabilité conditionnelle. Cette démarche permet de remarquer que si un 4 est sorti au lancer du premier dé alors il faut un 3 pour avoir un total de 7. Et la probabilité pour tirer ce 3 manquant est de 1/6. Donc "si un 4 sort d'abord, avoir un total de 7 à la fin" a une probabilité 1/6. À part un 4 d'abord, quels autres tirages du premier dé laissent la possibilité d'avoir un total de 7 après le second lancer? Et dans chaque cas avec quelle probabilité conditionnelle?

Mais si on se pose la même question pour avoir une somme de 4 la situation est différente. Car avec une lancée différée, si c'est un 5 qui sort d'abord il n'y a plus de chance d'avoir une somme 4: "si un 5 sort d'abord, avoir un total de 4 à la fin" a une probabilité égale à 0. Alors que si c'est un 3 qui sort d'abord on aura une probabilité de 1/6 pour avoir un 1 après et donc une somme 4. "Si un 3 sort d'abord, avoir un total de 4 à la fin" a une probabilité conditionnelle égale à 1/6. Le rapport avec le 1/12 qui est la probabilité d'avoir la somme 4 dans une lancée conjointe des deux dés est bien mystérieux.

Cette situation a été utilisée pour discuter de la différence entre les événements (3 rouge et 4 bleu) et (4 rouge et 3 bleu).

Un dé après l'autre pour un total de 7

... et pour un total de 4

4. Les fluctuations

Certains ont noté que l'accord des résultats avec les prévisions n'était pas parfait. D'autres au contraire pensaient que l'accord était excellent! :-) Occasion pour mentionner (aux plus grands) la notion de "barre d'erreur".

De façon remarquable, un des enfants (12 ans) a fait remarquer que la somme 12 sortait plus souvent que la somme 2 alors que le décompte des possibilités est le même dans les deux cas: une seule possibilité. La main invisible? Grande déviation? Raison physique (le côté 1 du dé est plus lourd que le côté 6 a cause du vide des trous)? Il n'y a pas eu d'accord. Et pour cause! :-)

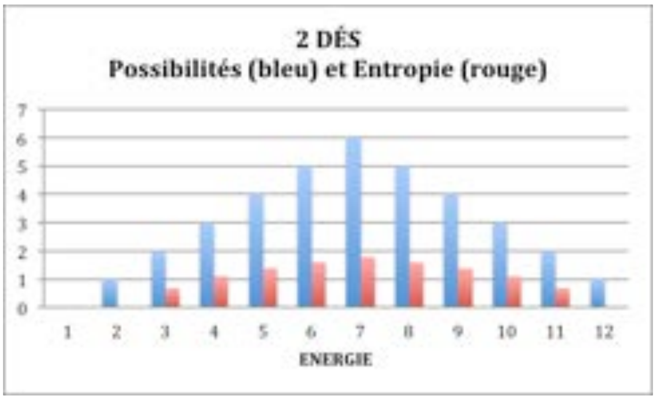
3. Entropie: un intermezzo.

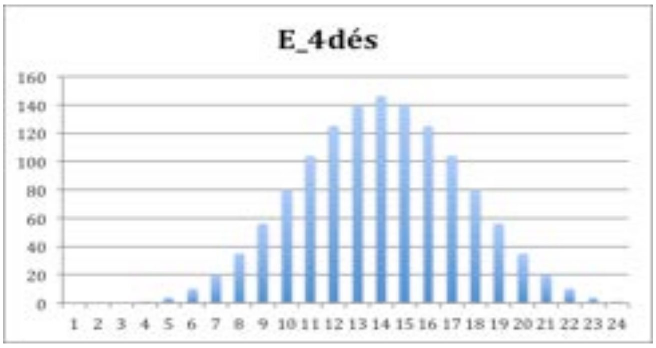
Le mot entropie a été largement plébiscité! Mais il ne faut surtout pas penser le jeu de dés comme une "illustration" du

concept d'entropie mais bien au contraire, l'entropie comme une façon de mettre un mot sur une évidence qui se dessinait au tableau.
C'est d'ailleurs comme ça que les enfants ont réagi: "Le 7 a une grande entropie", "Je note ce mot au feutre sur mon bras" (cf. "tatouage", 4ème photo du premier rang), "Super pour en parler aux parents"!

Commentaire Off: Le dénombrement des possibilités est à l'origine de la description et compréhension des Lois du Hasard. Imaginons que chacun des dés "représente un atome", que le résultat du tirage de ce dé "représente l'énergie de l' atome, son état microscopique" au moment du tirage. Donc la somme "représente l'énergie totale, l'état macroscopique du système". Dans le cas de 2 dés les valeurs possibles de cette "énergie totale" va de 2 à 12. Et il existe un certain nombre de possibilités différentes pour avoir chaque somme donnée.
Calculer le dénombrement des "états microscopiques" correspondant à chaque état macroscopique pour un système de 3 dés (Énergie totale entre 3 et 18) est fastidieux. Par contre le calculer pour 4 dés (Énergie totale entre 4 et 24) en utilisant le calcul préalable avec 2 dés est très instructif. Nous vous invitons à le faire.

Voici le résultat du nombre de possibilités pour chaque valeur de l'énergie totale, pour le cas de 2 et de 4 dés:



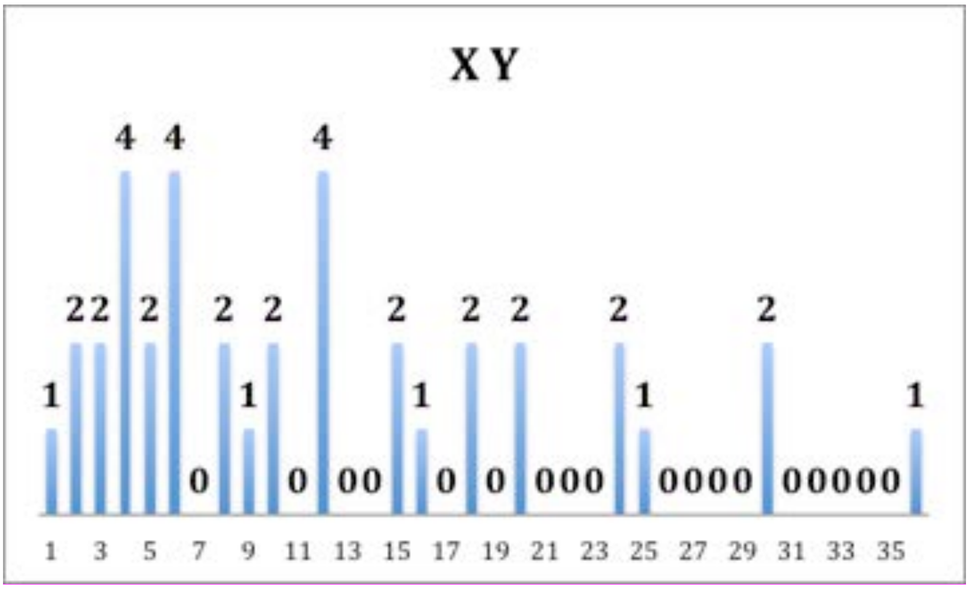


Le nombre des états microscopiques possibles qui coïncident en un même résultat macroscopique final est à la base de la notion d'entropie introduite par Boltzmann au XIX siècle. C'est là une première façon de quantifier la probabilité d'un état macroscopique. L'entropie est aujourd'hui encore au centre de beaucoup de domaines de recherche (les trous noirs, la théorie de l'information, la diversité génétique, ...). L'idée de définir l'entropie comme le logarithme du nombre des possibilités au lieu de prendre directement leur nombre est une astuce mathématique qui permet de transformer le produit des possibilités (quand on assemble deux systèmes) en la somme des entropies. L'utilisation de cet indicateur dans des systèmes informatiques codés avec deux symboles (0 et 1) a rendu populaire le logarithme de base 2 pour la définition de l'entropie.
Il est tout aussi intéressant de regarder cet exemple d'un autre point de vue, "l'information": si nous apprenons que le résultat d'un tirage de deux dés a une somme égale à 12 nous pouvons conclure avec certitude que chaque dé est tombé sur le 6, autrement dit il n'y a qu'un état microscopique compatible avec le résultat. L'entropie est alors zéro ($\log 1 = 0$). Nous pouvons dire, de façon équivalente que nous avons une "information" maximale sur l'état microscopique du système: c'est 6 et 6 avec certitude. Mais si nous apprenons que l'état macroscopique d'un tirage des deux dés est 7 (la somme des issues du tirage de chaque dé) alors cette information seule ne nous permet pas de connaître avec certitude l'issue du tirage de chaque dé. Il est facile de vérifier que 7 est l'état macroscopique d'entropie maximale pour ce système de deux dés (voir graphe ci-dessus). En ce sens l'entropie apparaît comme l'ignorance restant sur l'état (microscopique) du système après une mesure de l'état macroscopique.

Une fois arrivés ici nous pouvons entrevoir l'utilisation faite pas Shannon de cette notion lors de son étude sur les propriétés des codes (messages, informatique, etc.).

4. Autres variables aléatoires: différence et produit.

Il est aussi intéressant de considérer (et de jouer) avec d'autres variables aléatoires autres que la somme des deux dés après chaque tirage. On peut penser chaque variable aléatoire comme une observation faite sur le système où on ne garde qu'une partie de l'information détaillée du système. On peut étudier ainsi la valeur absolue de la différence des deux dés, voir la différence si on lance d'abord un dé et après l'autre. La première variable peut prendre des valeurs entre 0 et 5 et la deuxième entre -5 et +5. Mais la distribution de ces variables aléatoires n'est pas très différente de celle de la somme. Plus étonnante et intéressante à comprendre est celle du produit (X Y) de la valeur du lancé des deux dés. Ce produit peut varier entre 1 et 36 mais certaines valeurs sont impossibles. Le lien avec le cryptage des codes bancaires par décomposition en produit de facteurs premiers peut être évoqué.



Distribution de probabilité (plus exactement l'histogramme) du produit des valeurs du lancé de deux dés.

5. Deux dés: cahier de charges.

1. **Jeux de société avec 2 dés**

Il faudrait étudier quelques jeux de société déjà existants pour savoir s'ils sont utilisables dans ce parcours. Entre autres des jeux à deux dés:

CRAPS
https://fr.wikipedia.org/wiki/Craps

QUINITO
https://fr.wikipedia.org/wiki/Quinito_(jeu)

HISTOIRE ET VARIÉTÉS DE JEUX
https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_d%C3%A9s

2. **Jeu CAN'T STOP**

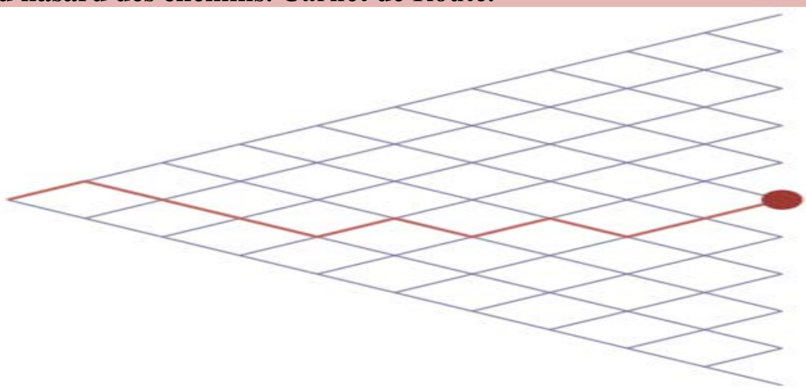
Imaginer un support matériel pas cher et pratique qui permettrait d'utiliser ce jeu en salle de classe. Vertical? Horizontal sur table?

Le « Can’t Stop » est un jeu de société très simple mais très sympa. C’est une sorte de jeu de l’oie où les pions sont des grimpeurs escaladant des colonnes numérotées de 2 à 12. Chaque joueur choisit sa colonne. Le but du jeu est d'arriver le premier en haut de sa colonne. Pour monter d’un cran sur la colonne 5, il faut tirer exactement 5 en lançant deux dés (3 et 2 par exemple ou 4 et 1). Les colonnes sont de différentes longueurs, les plus longues au centre et les plus courtes sur les bords.

Quand on commence à jouer, on se dit qu’il est plus facile d’arriver rapidement au sommet de la colonne 2 (seulement 3 cases à grimper) que de la colonne 7 (13 cases). Mais dès qu’on pratique un peu, on se rend vite compte que c’est plutôt l’inverse. Car même s’il y a 4 fois moins de cases à grimper dans la colonne 2, il y a 6 fois moins de chance de tirer un 2 (une seule combinaison: {1,1}) qu’un 7 (6 combinaisons: {1,6},{2,5},{3,4}{4,3}{5,2}{6,1}).

6. Marche aléatoire: Au hasard des chemins. Carnet de Route.

départ



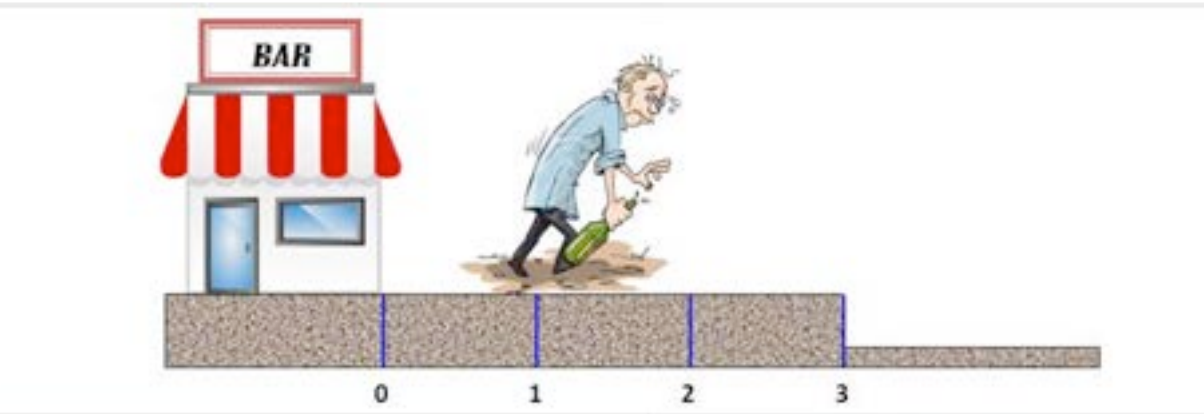
arrivée

C'est un classique du hasard. On peut jouer aux dés ou à la roulette. L'idéal serait de jouer avec des "pile ou face" (vers le haut ou vers le bas). Chacun place un pion sur un site de la ligne d'arrivée comme "objectif". Un unique gros pion démarre sur le "départ" et avance vers la ligne d'arrivée avec des pas vers le haut (si pile) ou vers le bas (si face) à chaque tirage.

Mais où placer son pion pour avoir le plus de chances de gagner? Et pourquoi? Et comment quantifier ces chances? L'entropie revient de sous le tapis!

Commentaire Off: "Les corps en suspension dans un fluide doivent, du fait de l'agitation thermique des molécules, effectuer des mouvements d'une ampleur telle qu'ils puissent être aisément mis en évidence au microscope. Il se peut que le mouvement dont il est question ici soit identique à ce qu'on appelle "mouvement moléculaire brownien". Les informations dont je dispose à ce sujet sont cependant si peu précises qu'il ne m'a pas été possible de me faire une opinion", A. Einstein, Annalen der Physik, 1905.

Cette activité peut aussi donner lieu à un jeu, grandeur nature, sous les arcades de la cour de la Vieille Charité:



7. Marche aléatoire: Au hasard des chemins. Cahier de Charges.

Grande question technique: comment fabriquer une grille (style jeu de l'oie) pour être utilisée en classe? Verticale avec pions magnétiques? Horizontale sur une table?
Autre question: comment fabriquer un appareil à tirer à pile ou face? J'ai vu plusieurs modèles dans "*https://**toutpourlejeu**.com*", faudrait tester! En particulier des jetons face rouge/face bleu à tirer avec un gobelet?