

ÉLÉMENTS D'UN PARCOURS D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE POUR ENSEIGNER L'ALGÈBRE AU CYCLE 4

Yves MATHERON

Institut Français de l'Éducation - ENS de Lyon
Institut de Mathématiques de Marseille

Résumé : Le point de vue sur l'algèbre élémentaire développé en Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) permet de la considérer comme processus de modélisation de « programmes de calcul » (Chevallard, 2005). La question fondamentale pour des ingénieries didactiques de développement consiste à rechercher des situations faisant rencontrer la nécessité du savoir à partir d'une question qui puisse l'engendrer et soit dévolue aux élèves. Dans cet article, nous exemplifions trois types de situations expérimentées dans les classes, incluses dans un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) permettant une entrée dans l'algèbre reprise en plusieurs fois au long du cycle 4, s'appuyant sur la nécessité de la modélisation de programmes de calcul pour réaliser des calculs plus économiques, puis pour calculer sur ces programmes modélisés.

Mots-clés : programmes de calcul, modélisation, parcours d'étude et de recherche, algèbre élémentaire.

Abstract : The Anthropological Theory of Didactics (ATD) considers the elementary algebra as a modeling process of "calculation programs" (Chevallard, 2005). The fundamental question for didactical developmental engineering is to look for situations that make the need for knowledge coming from an engendering question for students. In this article, we exemplify three types of situations that we had experienced in classes, included in a Study and Research Course (SRC) allowing an entry into algebra repeated several times at the junior secondary school. It is based on the need for modeling of calculation programs to perform more economical calculations then to calculate on these modeled programs.

Keywords : calculation programs, modeling, study and research course, elementary algebra.

Introduction - épistémologie de l'algèbre et programmes de calcul

Lorsqu'on se penche sur l'histoire et l'épistémologie de l'algèbre, on rencontre tôt ou tard les *Éléments d'algèbre* de Clairaut édités en 1746. C'est un ouvrage didactique — la visée en est l'enseignement de l'algèbre commencé de zéro — qui s'ouvre, dès les premières pages, sur l'une des questions auxquelles elle répond. Dans l'introduction, et parce qu'il est « *l'un des plus propres à faire voir comment ils [les algébristes] sont parvenus à former la science qu'on nomme Algèbre ou Analyse* », Clairaut aborde un problème, devenu classique, de partage d'une somme d'argent, des livres à cette époque, dont il expose deux techniques de résolution¹.

D'une part, comment « *aura raisonné un homme, qui, sans aucune teinture de l'Algèbre, sera parvenu à résoudre ce problème* » : le type de techniques qu'emploierait cet homme prendrait la forme d'un programme de calcul rédigé en français, selon l'usage en vigueur avant l'« invention » de l'algèbre. Quelques extraits du texte de résolution de Clairaut permettent de montrer cela :

Supposons, par exemple, qu'on connaisse la troisième [part] qui est la plus petite, il faudra y ajouter 115 livres, & l'on aura la valeur de la seconde ; ensuite pour avoir la troisième, il faudra ajouter 180 livres à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoutait 180 livres plus 115

¹ Il s'agit de partager 890 livres entre trois personnes de sorte que la première en ait 180 de plus que la seconde et la seconde 115 de plus que la troisième.

livres ou 295 livres à la troisième. [...] De là, il faut que le triple de la plus petite part, plus 115 livres plus 295 livres ou en une fois plus 410 livres est égal à 890 livres. Or, si le triple de la part qu'on cherche plus 410 livres est égal à 890 livres, il faut donc [...].

D'autre part, en montrant comment « *l'Algébriste fait pour résoudre son problème et en caractères Algébriques, ce qui lui suffit d'écrire pour aider sa mémoire* ». Clairaut, en opposant ces deux techniques de résolution, retrouve ici le point de vue de Descartes sur la mémoire, dans les *Règles pour la direction de l'esprit* (1628-1629), qui met l'accent sur le bénéfice que procure l'algèbre : elle soulage la mémoire dans la résolution des problèmes. Car, écrit Clairaut à propos des « non algébristes » dont il montrait la technique recourant à l'usage du français, « *à mesure qu'ils avançaient vers la solution d'une question, ils chargeaient leur mémoire de tous les raisonnements qui les avaient conduits au point où ils en étaient* ». A contrario, la justification mise en avant par Clairaut pour l'étude de l'algèbre repose sur la nécessité de trouver « *une manière plus courte de s'exprimer* », grâce à « *quelques signes simples, avec lesquels, quelque avancés qu'ils fussent dans la solution d'un problème, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avaient fait et ce qu'il leur restait à faire* ». L'écriture et le raisonnement algébriques procurent ainsi une vision plus large de la résolution du problème, ce qui en permet un contrôle à partir du point auquel on est parvenu lors du travail de résolution. À l'opposé, la technique non algébrique de résolution nécessite un effort de mémoire soutenu car elle s'appuie sur des raisonnements assez longs, écrits dans le langage courant, associés à des calculs arithmétiques, soit ce qu'on peut désigner du terme de « programme de calcul ».

Sous réserve d'une recherche exhaustive, il ne semble pas exister de définition canonique du terme en dehors de la pratique sur laquelle on s'accorde dans les institutions qui l'utilisent : en France, essentiellement l'Éducation Nationale à travers les documents officiels, programmes et accompagnements, et les manuels. On en trouve une définition dans un mémoire de M2 de l'Université Joseph Fourier (Geoffroy, 2014) :

Nous appellerons programme de calcul la description d'une suite d'opérations à effectuer sur un nombre de départ quelconque afin d'obtenir un nouveau nombre, dépendant a priori du nombre de départ.

Chevallard (1990) précise que « *la description d'une suite d'opérations* » a historiquement recouru au langage ordinaire ; c'est le cas de l'exemple utilisé par Clairaut. L'usage partagé au sein des classes du cycle 4 fournit une définition fonctionnelle, en extension, de ce que l'on entend par programme de calcul, qui recouvre les exemples évoqués dans cet article.

En ne perdant pas de vue l'épistémologie de l'algèbre élémentaire telle que succinctement exposée ci-dessus à partir de Descartes et Clairaut, il est possible de faire en sorte qu'à travers le parcours d'étude et de recherche (PER) dont quelques grandes lignes sont exposées dans cet article, les élèves éprouvent par eux-mêmes la nécessité d'une entrée dans l'algèbre. Les raisons en sont mathématiques, et non pas imposées par le suivi docile du professeur ou du programme. Mais avant cela, et pour mettre en évidence certains traits présents caractéristiques du travail algébrique, il est nécessaire de faire un petit détour par un exemple. Pour d'évidentes raisons liées aux connaissances d'élèves en début de cycle 4, et aussi parce qu'il apparaîtra purement gratuit au lecteur qui dispose d'une calculatrice ou maîtrise l'algorithme de la multiplication, il ne fait pas partie du PER.

Le voici sous forme de programme de calcul P tel qu'on aurait pu le formuler « *avant l'invention* » de l'algèbre « *pour calculer le carré d'un nombre dont l'écriture décimale se termine par 5, prendre la demi-somme des carrés des dizaines encadrant ce nombre, et retrancher 25* ». Selon P :

$$85^2 = \frac{1}{2}(80^2 + 90^2) - 25 = \frac{1}{2}(6\,400 + 8\,100) - 25 = \frac{1}{2} \times 14\,500 - 25 = 7\,250 - 25 = 7\,225$$

Une calculatrice permet d'obtenir ce résultat ; la connaissance de P est donc grandement inutile. Dans le langage contemporain, ce programme de calcul est une technique qui interroge cependant, dès son premier abord : la proposition qui lui est associée est-elle vraie, ou fortuitement vraie pour 85^2 seulement ? Pour répondre, le lecteur sera sans doute tenté de traduire le programme sous forme d'écriture algébrique, puis de mener à bien un calcul élémentaire afin d'établir son degré de vérité, c'est-à-dire de rédiger un raisonnement qui s'apparente à celui-ci : si n est un nombre qui se termine par 5, alors les nombres des dizaines qui l'encadrent sont $n-5$ et $n+5$. La demi-somme de leurs carrés moins 25 peut s'écrire et se calculer de la manière suivante :

$$\frac{(n-5)^2 + (n+5)^2}{2} - 25 = \frac{n^2 - 10n + 25 + n^2 + 10n + 25}{2} - 25 = \frac{2(n^2 + 25)}{2} - 25 = n^2 + 25 - 25 = n^2$$

Ceci prouve que la proposition associée au programme de calcul est vraie quel que soit n . À partir de cet exemple peuvent être relevés plusieurs points qui montrent l'apport du recours aux écritures algébriques pour les programmes de calcul.

Une première modélisation permet de désigner par n le nombre dont l'écriture décimale se termine par 5. Elle permet ensuite, et grâce à des *ostensifs*² (dans ce cas, les ostensifs scripturaux n , $+$, $-$, 2 , 5 , $=$, $(\dots)^2$ et le trait de fraction) que l'usage familier nous rend transparents, de modéliser les nombres des dizaines qui l'encadrent : $n-5$ et $n+5$. Elle se poursuit par l'écriture de leurs carrés. En ce point, il faut remarquer que l'algèbre nous a libérés du fait de les considérer comme mesures d'aires de carrés, contrairement au lien direct entre nombres et mesures d'une grandeur — une longueur, une aire, un volume — chez Euclide, jusqu'à ce que Descartes (1637) s'en affranchisse.

La modélisation à l'aide d'ostensifs algébriques autorise le calcul, qui aurait été malcommode avec le recours au seul langage ordinaire à l'aide duquel est décrite la technique. Elle autorise aussi l'anticipation du calcul : l'écriture algébrique des carrés d'une somme et d'une différence de deux nombres appelle l'utilisation des « identités remarquables ». Le calcul algébrique prouve et éclaire l'équivalence entre le programme de calcul P_1 : « Prendre la demi-somme des carrés des dizaines encadrant un nombre dont l'écriture décimale se termine par 5, et retrancher 25 » et le programme de calcul P_2 : « Calculer le carré d'un nombre dont l'écriture décimale se termine par 5 ».

Dans ce sens, le calcul algébrique remplit une fonction technologique³ : il justifie, rend compréhensible et produit la technique de calcul du carré d'un nombre dont le chiffre des unités est 5 en base 10. Enfin, on peut remarquer que le programme de calcul est vérifié quels que soient les nombres considérés, qu'ils soient ou non entiers, qu'ils aient ou non une écriture

² À la suite de la thèse de Bosch (1994), Bosch et Chevallard (1999) définissent les « *ostensifs* » comme se référant « à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible ».

³ La technologie est l'une des dimensions d'une organisation mathématique. Celle constitutive du discours raisonné qui permet de produire la technique pour réaliser un type de tâches, de la justifier et de la rendre compréhensible. Pour plus de détails sur la notion, on pourra se reporter à l'article *Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques. Quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique* (Matheron, Noirfalise & Combelles, 2006).

décimale se terminant par 5 ; ce qui ne présente pas nécessairement un intérêt calculatoire, mais montre que l'algèbre permet d'obtenir un élargissement du résultat, au-delà des entiers naturels sur lesquels portait le programme.

Dans le prolongement des propos de Clairaut, le point de vue sur l'algèbre élémentaire que nous suivons considère celle-ci comme modélisation de « programmes de calcul », bien avant que la dénomination ait rencontré un certain succès dans les programmes scolaires du Collège français. La modélisation algébrique des programmes de calcul permet ensuite de calculer sur des programmes de calcul. Cette entrée épistémologiquement fondée, ou encore constitutive d'un modèle épistémologique de référence (Gascón, 1993), autorise la conception d'ingénieries didactiques à partir de questions génératrices qui portent les raisons et la nécessité de l'algèbre, et dont l'étude et la recherche des réponses sont dévolues aux élèves. Il reste alors à construire des situations à partir desquelles les organisations mathématiques propres à l'algèbre apparaîtront comme « stratégies les plus économiques » pour les résoudre selon la Théorie des Situations Didactiques (TSD).

Une situation génératrice de l'algèbre qui ne serait rencontrée qu'une seule fois par des élèves ne connaissant que des techniques arithmétiques ne peut guère emporter la conviction de sa nécessité. Dans la suite de cet article, nous exemplifions trois types de situations expérimentées dans les classes, permettant une entrée dans l'algèbre reprise en plusieurs fois, s'appuyant sur la nécessité de modéliser des programmes de calcul. Une première rencontre avec les programmes de calcul pour l'étude des nombres relatifs (autrefois justement qualifiés « d'algébriques ») ; la nécessité d'une modélisation algébrique à partir d'une proposition issue de la thèse de Krysinska (2007) ; la nécessité d'une modélisation conduisant aux équations.

Des extraits du PER sur l'algèbre au cycle 4, construit à partir du travail du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille puis du LéA (Lieu d'éducation Associé à l'Institut Français de l'Éducation) Réseau Collège Marseilleveyre, se trouvent sur le site :

<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe>

Cet article en montre l'infrastructure et expose certains des travaux d'élèves.

Au-delà de la production de propositions d'enseignement dont étaient demandeurs les enseignants impliqués dans ces projets, l'une de leurs dimensions ayant conduit à ce PER consistait à observer les conditions, contraintes et effets de l'implantation dans le système scolaire « standard » d'une ingénierie didactique de développement. C'est ainsi que les observations recueillies à partir de cette ingénierie didactique de développement ont fourni les matériaux empiriques pour nourrir deux travaux de thèse : celle de Bernad (2017) et celle de Méjani (2018).

I. Les nombres relatifs en tant qu'économie dans des programmes de calcul

La difficulté de l'enseignement des relatifs est avant tout mathématique. Elle s'accroît à partir d'une certaine transposition didactique qui, non seulement a éloigné considérablement les mathématiques enseignées dans le secondaire des mathématiques « savantes », mais qui de plus, usant de métaphores « externes » aux mathématiques car se voulant « concrètes », est lourde d'obstacles potentiels à l'apprentissage. Les manuels et les professeurs recourent le plus souvent, dans les activités qu'ils proposent sur ce thème, à des exemples tirés de la mesure de grandeurs repérables, et non pas mesurables : altitude et profondeur, étages d'ascenseurs, échelle des temps historiques, *etc.* Ce choix permet d'étudier immédiatement l'ordre mais n'autorise le calcul, non

pas sur les mesures, mais uniquement sur les différences des mesures de telles grandeurs. On ne peut en effet ajouter des températures, l'axiome d'additivité d'une mesure ne pouvant s'appliquer à la mesure de telles grandeurs, mais seulement ajouter ou soustraire leurs variations (il faisait 1°C et la température a baissé de 4°C , quelle température fait-il maintenant ?) Bâtie à partir d'exemples propres à des grandeurs de dimension 1, une telle entrée pour cet enseignement engage vers une difficulté qui s'accroît et devient insurmontable pour certains élèves lorsqu'ils ont à étudier le produit de relatifs. La métaphore concernant des variations de mesures de grandeurs de dimension 1, dont ils conservent le souvenir, se constitue alors en véritable obstacle didactique si l'on considère que le produit devrait mesurer une grandeur de dimension 2.

Au plan mathématique, il s'agit dans un premier temps de symétriser un monoïde, plus précisément le demi-groupe $(\mathbb{N}, +)$ à partir d'une relation d'équivalence R , de construire une opération interne dans le groupe-quotient $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$, soit $(\mathbb{Z}, +)$, prolongeant avec elle la soustraction dans $\mathbb{N}$, ainsi qu'une relation d'ordre compatible avec l'addition. Le programme dit de « *la réforme des mathématiques modernes* » proposait une transposition didactique s'appuyant sur une telle construction algébrique. La question didactique est celle de savoir si l'on peut actuellement transposer cette construction afin qu'elle fournisse à l'enseignement, dès le début du cycle 4, une infrastructure mathématique solide, sans pour autant recourir explicitement aux notions de relation et de classe d'équivalence, de groupe commutatif, etc. Par exemple, la notion de classe d'équivalence, même si elle n'est plus enseignée, est cependant connue « en acte » des élèves : des secteurs superposables donnent le même angle, des fractions équivalentes représentent le même rationnel.

Autrement dit, ces connaissances font contractuellement partie de l'univers cognitif des élèves (Chevallard, 2018) car elles ont été en principe enseignées, puisqu'institutionnellement attendues. Compte tenu de ces contraintes, mais aussi en s'appuyant sur des conditions relatives aux connaissances disponibles, on peut éviter des obstacles à l'apprentissage tels que ceux évoqués plus haut, assumer des choix raisonnés tenant compte des difficultés de nature mathématique, faire établir des propriétés et en admettre d'autres, dans le but de proposer un enseignement qui procurerait du sens aux élèves dès la classe de 5^e de l'actuel programme.

La solution trouvée pour notre proposition concernant l'enseignement des relatifs, en vue de garantir une qualité mathématique à l'enseignement dont l'explicitation n'est fournie qu'en direction des professeurs, ou encore afin de leur proposer un modèle épistémologique de référence comme soubassement à leur enseignement, consiste à faire travailler les élèves sur des polynômes du 1^{er} degré, que nous nommons temporairement et entre nous opérateurs, définis de la manière suivante :

Étant donnés les entiers naturels a et b :

on appelle opérateur dans $\mathbb{N}$ la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ notée $O(a, b)$ définie de la manière suivante :

- si $a \leq b$, alors $O(a, b)(x) = x + (b - a)$, on dit que $O(a, b)$ ajoute $b - a$,
- si $a > b$, alors $O(a, b)(x) = x - (a - b)$, on dit que $O(a, b)$ soustrait $a - b$.

Les ensembles de définition sont les suivants :

- si $a \leq b$, alors $D_{O(a, b)} = \mathbb{N}$,
- si $a > b$, $D_{O(a, b)} = \{x \in \mathbb{N} / x \geq a - b\}$.

On reconnaît ici l'idée de faire utiliser « en acte » par les élèves, sans l'étudier, la classique relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ définie par : $(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow (a + b' = a' + b)$ permettant de

symétriser $\mathbb{N}$.

En classe, par exemple, l'équivalence des opérateurs $O(4,6)$ et $O(9,11)$ se dit : « à un nombre, ajouter 4 puis soustraire 6, est équivalent à dire qu'à ce nombre, on ajoute 9 puis on soustrait 11 ». Le raisonnement des élèves, en tant que technologie permettant de justifier que $+4-6=+9-11$, s'appuie sur la connaissance des opérateurs additifs qu'ils ont acquise en primaire (Vergnaud, 1980). La notion d'entier relatif comme classe d'équivalence est ainsi vécue « en acte » par les élèves ; notamment à travers des exercices où ils ont à inventer, dans un second temps, diverses expressions produisant les opérateurs soustractifs 2, 3, etc., ou additifs 1, 2, etc. Les élèves fournissent alors tout un assortiment de couples correspondant à -2 , -3 , $+1$, $+2$, etc.

En classe, ce choix se décline dans un travail sous forme de calcul mental où les types de calcul, nombreux, sont par exemple : « calculer $2019+356-357$ ». En fait, il s'agit de proposer un travail sur le même programme de calcul P : « à un nombre on ajoute un second et on retranche un troisième », dont on fait varier les valeurs. Un tel calcul mental a un coût élevé pour nombre d'élèves de ce niveau (12 à 13 ans) car ils opèrent de gauche à droite ; ils ont alors tendance à rechercher une stratégie de calcul plus économique. Lorsqu'ils s'aperçoivent qu'il suffit de retrancher 1, que le professeur notera -1 , au premier nombre, il leur est demandé de le justifier mathématiquement. Le petit îlot déductif dans lequel ils s'engagent généralement consiste à « emprunter » 1 au premier nombre : $2018+(1+356)-357$.

Ensuite, il leur est proposé de construire d'autres expressions qui reviennent à soustraire 1, 2, 3, etc. Les élèves éprouvent ainsi l'économie réalisée dans l'application d'un programme de calcul à n'importe quel nombre grâce à des entités nouvelles qui s'écrivent comme des entiers naturels mais auxquelles sont affectés des signes « + » ou « - ». Comme on peut les composer ou écrire des expressions telles que, par exemple, $-7+5-10$, ce qui se dit « à un nombre, on retranche 7, ajoute 5 puis soustrait 10, donc on lui soustrait 12, noté -12 », les élèves constatent ensuite, par la pratique, que ces entités se comportent un peu comme des nombres. Définir ce qu'est un nombre est ontologiquement difficile parce que sans réponse. Aussi la question devient-elle, à partir de ce qui se fait avec ces nouveaux objets, celle de savoir si l'on peut les considérer comme tels. La réponse sera donnée par des élèves de ce niveau du cursus à l'aune de la possibilité d'opérer avec eux et de définir un ordre. La question, transposée, devient celle de la construction d'une addition, d'une soustraction, d'un ordre puis, plus tard, d'une multiplication qui prolongent sur les relatifs entiers et décimaux, les opérations connues sur les naturels.

Par exemple, pour l'addition, la connaissance de la décomposition additive des nombres permet d'établir $7+(-2)=5$, car on écrit $7+(-2)=5+2+(-2)$. Les élèves ont alors immédiatement envie d'affirmer que cette somme est égale à 5. Le professeur les arrête et demande d'établir la preuve du résultat $2+(-2)=0$. C'est l'occasion de rencontrer de manière fonctionnelle la définition mathématique de l'opposé d'un nombre.

La construction de la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}_-$ s'appuie sur la connaissance « en acte » de la compatibilité de la relation d'ordre $\leq$ avec l'addition dans $\mathbb{N}$, connaissance qu'ont les élèves dès le CP à partir des décompositions additives des nombres, et que l'on étend à $\mathbb{Z}$. Ainsi, si l'on souhaite savoir si -9 est supérieur ou inférieur à -7 , question dévolue aux élèves et dont les réponses qu'ils donnent suscitent le débat, il est rare qu'un élève au moins ne propose d'utiliser l'ordre connu sur $\mathbb{N}$. Le raisonnement est le suivant : $-9+10=1$ et $-7+10=3$, comme $1<3$, alors $-9<-7$. Ce qui suppose que l'addition soit enseignée avant l'ordre, contrairement aux choix faits par la majorité des manuels.

La règle des signes du produit s'appuie sur l'extension, de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ et à $\mathbb{D}$, de la distributivité de la multiplication sur l'addition-soustraction, puisqu'il s'agit de construire les anneaux $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{D}, +, \times)$; l'associativité de $\times$ est, elle-aussi, établie à cette occasion. Pour « forcer » les élèves à recourir à la distributivité afin d'établir la règle des signes, on travaille dans $\mathbb{D}$ et non pas dans $\mathbb{Z}$, ce qui évite de faire revivre le concept de multiplication comme addition itérée. Cette dernière connaissance se construit en effet en obstacle dès qu'il faut rechercher et justifier, par exemple, le calcul du produit $-7 \times (-8)$ ou encore de $7,3 \times (-8,2)$.

Ainsi, $7,3 \times (-8,2) = 7,3 \times (10 - 18,2) = 7,3 \times 10 - 7,3 \times 18,2 = 73 - 132,86 = -59,86$.

Une partie du document portant cette proposition d'enseignement des relatifs est accessible en ligne⁴.

L'intérêt de cette entrée dans l'étude des relatifs, outre le fait de pouvoir être contrôlée au plan mathématique, réside dans le degré de générativité de la question initiale à laquelle les élèves ont été confrontés, qui porte sur les programmes de calcul et qui leur est facilement dévolue. Ils ont tout d'abord à rencontrer puis à simplifier un « programme de calcul », ce qui permet de générer d'autres questions, tout en faisant vivre auprès d'eux leur modélisation. Les réponses aux questions qui émergent d'une telle entrée par les programmes de calcul constituent un fil directeur, un parcours, pour enseigner une partie du programme d'algèbre du cycle 4 — calcul littéral, équations — et fournissent un marchepied pour l'étude algébrique des fonctions et de leurs variations.

II. L'écriture littérale comme modélisation économique des programmes de calcul

Au sein du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, nous avons repris, en l'adaptant pour un enseignement dans des classes de 5^e et 4^e (élèves de 12 à 14 ans), une proposition d'activités issue d'une expérimentation menée en Belgique, désormais exposée dans l'article « Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels », publié dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* (Krysinska et al., 2009). Connue en partie de par sa diffusion dans le réseau des IREM, cette proposition a été transposée par certains manuels, parfois au prix de son adidacticité. Cette perte d'adidacticité touche aussi l'activité dite « des carrés bordés » lorsqu'elle est proposée par des auteurs de manuels. Elle est pourtant bien connue car initiée par Combiér et al. (1996), figurant dans l'un des documents d'accompagnement de programme intitulé *Du numérique au littéral*, publié en 2006, reprise par nos collègues de l'IREM de Clermont-Ferrand, puis ayant donné lieu à plusieurs publications dont l'une dans *Petit x* n° 78 (Coulange & Grugeon, 2008).

Nous disposons alors du travail de thèse en cours de Krysinska, de l'expérimentation qu'elle avait conduite durant trois années scolaires, de 2003 à 2006, dans des classes belges de niveau correspondant à la classe de 5^e française, et voulions la reproduire dans un autre contexte⁵. Nous avons donc testé en 2005-2006 sa viabilité au sein d'un atelier de mathématiques constitué d'élèves volontaires. Les résultats obtenus nous ont conduits à généraliser cet enseignement à des classes « ordinaires » de 5^e : à ce jour, au moins une trentaine de classes. Les travaux d'élèves présentés dans cette partie sont issus du travail de l'atelier de 2006 ; ceux réalisés

⁴ <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/cinquieme>

⁵ On trouvera une référence à l'expérimentation que nous avons menée en France, dans un atelier de 4^e piloté par M^{me} de Redon, p. 170 de la thèse de Krysinska, soutenue en 2007.

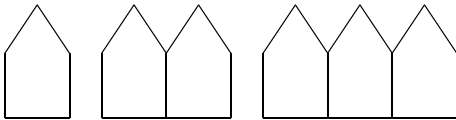
depuis lors par des élèves de classes « standard » en différent peu.

Il s'agit d'engager les élèves dans un type de tâches qui consiste à modéliser algébriquement, pour pouvoir les calculer, des problèmes dont les soubassements mathématiques sont constitués de suites arithmétiques ou géométriques. Ils sont ainsi conduits par nécessité à la construction d'une écriture analytique, sous forme polynomiale, des programmes de calcul par lesquels ils passent au cours du processus de résolution, afin d'obtenir *in fine* une modélisation mathématique plus économique et efficace. À partir de celle-ci, de nouvelles questions sont posées. On joue pour cela sur la valeur des variables didactiques afin que les connaissances antérieures des élèves leur permettent, dans un premier temps, de résoudre ces problèmes pour des petites valeurs des variables, mais qu'ils soient ensuite contraints de changer de technique après sa mise en échec pour des valeurs plus grandes. On reconnaît là une technique classique maintes fois utilisée dans des ingénieries didactiques, qu'elles soient de recherche ou de développement.

Une feuille de problèmes est distribuée aux élèves. Après un temps de recherche individuelle, ils sont mis en groupe afin de partager les propositions de résolution qu'ils ont trouvées. Nous donnons ci-dessous trois problèmes extraits de cette feuille :

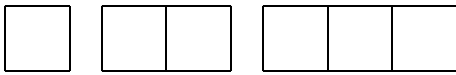
Voici cinq problèmes d'une même catégorie : on y demande de dénombrer des objets.

1. *Les assemblages suivants sont constitués d'allumettes. Combien y aura-t-il d'allumettes dans l'assemblage n° 10 ?*



1
2
3

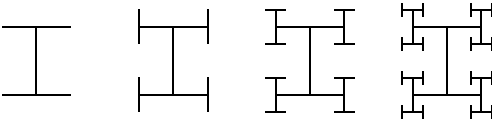
2. *Les assemblages suivants sont eux aussi constitués d'allumettes. Combien y aura-t-il d'allumettes dans l'assemblage n° 10 ?*



1
2
3

[...]

4. *Observez bien la manière dont chacun des motifs suivants a été constitué : chaque extrémité du motif précédent donne naissance à un segment se terminant par deux nouvelles extrémités. Dans ces conditions, déterminez le nombre d'extrémités du motif n° 10.*



1
2
3
4

Figure 1 : Extraits de la feuille de problèmes.

Pour les deux premiers problèmes, la détermination du nombre d'allumettes dans les assemblages n° 10 s'appuie généralement sur leur comptage dans des dessins qui les représentent avec éventuellement, comme ci-dessous, l'exposé d'une organisation du dénombrement :

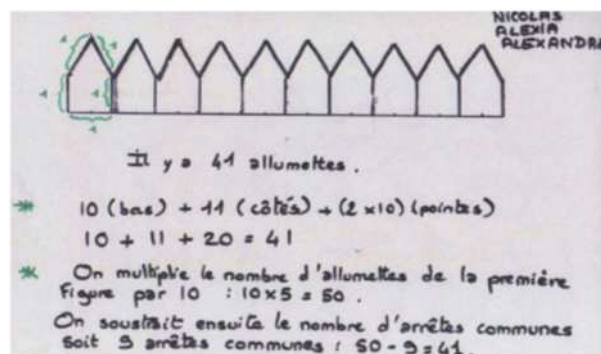


Figure 2 : Transparent « dénombrement ».

Tout autant de fois, la réponse est illustrée d'un tableau : les élèves se sont aperçus que dans le problème 1 (resp. 2), d'un assemblage à son successeur, le nombre d'allumettes s'accroît de 4 (resp. 3). Très rapidement apparaissent sur les transparents que chaque groupe rédige, et en appui aux réponses fournies, des phrases argumentant et justifiant les réponses données. C'est là sans doute le fruit des discussions qui ont eu lieu à l'intérieur des groupes. Par exemple, pour le problème 1, un groupe écrit, en appui au calcul $5 + 4 \times 9$ qu'il fournit : « nous avons constaté que entre deux assemblages l'allumette qui est au milieu compte une allumette pour deux ».

Le professeur demande alors combien d'allumettes dans l'assemblage 358. La portée de la technique précédente qui s'appuie soit sur le comptage, soit sur un processus de récurrence dont on a trouvé la raison 4 (resp. 3) en observant les réponses données sous forme de tableau, est dépassée. Il devient nécessaire de trouver une technique plus générale. Apparaissent alors des écritures qu'on peut qualifier de programmes de calcul, car rédigés en français et associant des opérations arithmétiques pour décrire comment faire, mais qui restent toujours adhérentes à la présentation du problème (des allumettes, des carrés, des maisons, des figures) comme dans le travail du groupe suivant :

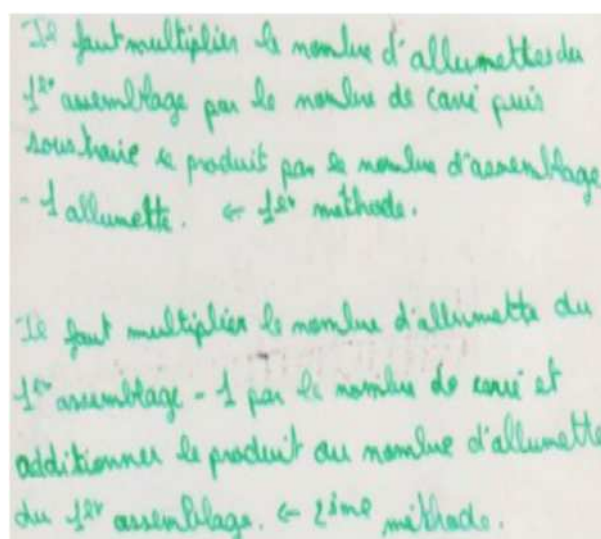


Figure 3 : Transparent « programmes de calcul ».

Commence à vivre l'idée que l'on aurait intérêt à trouver un moyen plus concis pour écrire ce que l'on perçoit être une technique générale pour un problème donné. Car il devient pénible d'écrire en français un « programme de calcul » Sont alors « créés » les ostensifs dont on a

besoin. Apparaissent à ce stade des écritures comme celle-ci :

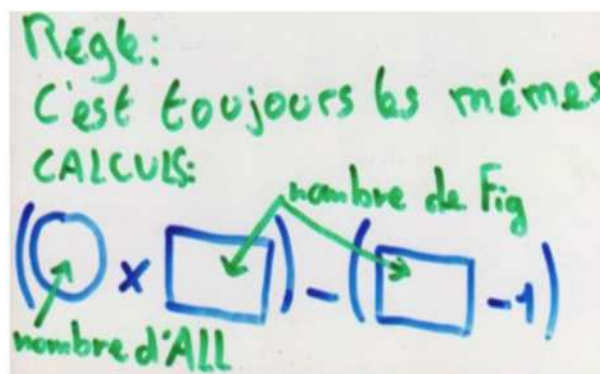


Figure 4 : Transparent « patterns »

Sans doute parce que des écritures utilisant divers types d'ostensifs sont présentes dans l'univers cognitif des élèves — ostensifs plus ou moins « réinventés » parce qu'émergeant d'épisodes de la biographie didactique d'élèves (Mercier, 1995) — revient en mémoire pratique le passage à des écritures littérales (Matheron, 2009). On sait en effet que l'usage de lettres en mathématiques a déjà été rencontré par les élèves, lors des deux années précédentes, de fin de l'école primaire (CM2 : élèves de 10 à 11 ans) et de première classe du collège (6^e : élèves de 11 à 12 ans), afin de disposer de formules générales pour périmètres et aires de figures usuelles : $\ell \times L$; $4 \times c$; $2 \times \pi \times R$. L'écriture de techniques « avec des lettres » débute dans certains groupes qui les exposent à la classe, même si elles relèvent parfois de maladresses qui s'estomperont par la suite, comme ci-dessous. L'idée commence à gagner la classe qu'il est nécessaire de trouver une manière « mathématique » d'écriture du programme de calcul : elle devra être plus concise, plus générale et donc de plus grande portée. Le professeur valide l'usage des lettres lorsque les élèves en demandent « l'autorisation ».

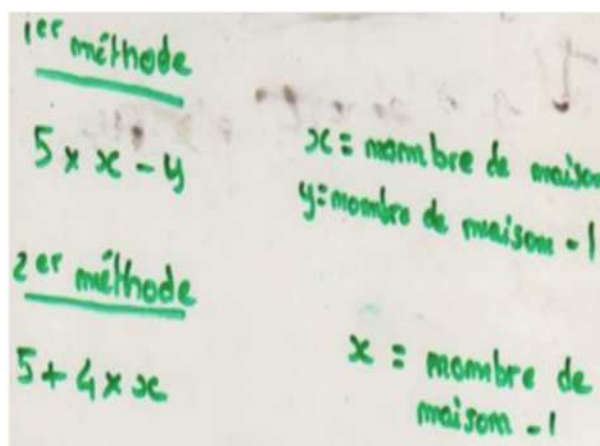


Figure 5 : Transparent « algébrisation ».

Après que le professeur a fait remarquer qu'il n'était peut-être pas nécessaire d'utiliser deux lettres, les écritures s'affinent et tendent vers l'usage d'une seule lettre qui, dans nos observations, semble pour les élèves désigner le nombre de maisons ou de carrés, comme on peut le voir dans les transparents qui précèdent. On obtient alors des écritures telles que celles-ci dans lesquelles le -1 en exposant ne signifie pas l'inverse du nombre mais la soustraction de 1 :

Figure 6 : Transparents « écritures algébriques ».

Nous n'avons pas interrogé, comme c'est le cas dans l'article de Krysinska, Mercier et Schneider (2009), la présence ou non de l'idée de dépendance fonctionnelle chez les élèves : c'est-à-dire si l'idée de covariations entre « nombre de maisons » et « nombre d'allumettes » s'exprimait à ce stade chez les élèves. Nous avons préféré accompagner de manière plus progressive l'entrée dans l'enseignement de la covariation de deux grandeurs. C'est ce que nous faisons dans le cadre du travail sur les équations présenté dans les pages suivantes.

Néanmoins, le transparent ci-dessous interroge sur ce point car traduisant peut-être, chez les élèves de ce groupe, les prémisses d'une appréhension fonctionnelle de la situation modélisée : la variable x pouvant être « *nimporte (sic) quel nombre* » et parce que « *cela dépend (sic) juste du nombre de maison (sic)* », grâce à la permanence de l'écriture analytique (« *c'est toujours le même calcul* ») comme ils l'écrivent :

Figure 7 : Transparent « fonction de la variable ».

Une question qui se pose ensuite, amenée le plus souvent par le professeur, est la suivante : Comment être certain que, par exemple, les écritures différentes $(5 \times x) - (x - 1)$, $5 + 4 \times (N - 1)$, $4 \times x + 1$ (resp. $4 \times N - (N - 1)$, $4 + 3 \times (n - 1)$, $3 \times x + 1$) fournissent le même résultat pour un nombre noté x , n ou N , correspondant à un nombre donné de maisons (resp. de carrés) ? La question suscite beaucoup de discussions. Les réponses sont contextualisées et s'appuient sur le retour aux figures définissant les problèmes. Les élèves expliquent que tel groupe compte d'abord le nombre d'allumettes nécessaires pour une maison, qui sont 5, puis retranche les allumettes mitoyennes, sauf pour la première des maisons, d'où l'écriture $(5 \times x) - (x - 1)$. Mais qu'un autre, au contraire, a compté 4 allumettes par maison, et qu'il faut alors en compter une de plus pour la première, d'où $4 \times x + 1$, etc.

Le professeur fait remarquer que s'il était impossible de revenir aux figures qui caractérisent ces problèmes, mais que l'on ne dispose néanmoins que des écritures littérales, il faudrait pourtant bien trouver un moyen pour savoir si celles-ci donnent ou non les mêmes réponses ; autrement dit savoir si elles sont ou non équivalentes. Cette question aboutit à la nécessité d'une écriture qui soit commune et la plus simple possible, que l'on pourra facilement identifier. D'où la raison d'être, vécue par les élèves, d'une écriture « canonique » pour des expressions littérales différentes et, pour ce faire, la nécessité de savoir « réduire et ordonner » des écritures polynomiales.

On pourrait penser, au vu des transparents qui précèdent, que les élèves de l'atelier de mathématiques étaient d'excellents élèves ; ce qui expliquerait la qualité de leurs productions. C'est en grande partie faux : ils étaient simplement animés d'une motivation à faire des mathématiques de leur niveau au-delà des 3,5 h hebdomadaires obligatoires.

Aussi, afin de vérifier le degré de généralité des effets didactiques produits par une entrée dans l'algèbre par les programmes de calcul, nous avons décidé de faire passer le premier de ces quatre problèmes à des élèves réputés faibles d'une classe de 5^e (élèves de 12 à 13 ans) d'un collège REP+ des quartiers nord de Marseille ; c'est-à-dire de tester cette proposition dans des conditions scolaires qu'on pourrait qualifier de « limites ». Les raisonnements utilisés par les élèves sont de natures comparables, évoluent de manière similaire au cours du processus de recherche et aboutissent à la nécessité de l'usage des lettres.

On l'a dit, la modélisation algébrique autorise des calculs sur les programmes de calcul ainsi modélisés. La nécessité de ces calculs peut être portée par des questions dévolues aux élèves. La première de ces questions, une fois étudiée la modélisation algébrique sous forme de polynômes du 1^{er} degré, seuls types de polynômes généralement rencontrés par les élèves au début de leur cursus secondaire, est, comme cela a été évoqué, la suivante : « comment démontrer que deux programmes de calcul sont équivalents ? »

Une deuxième question devrait « naturellement » suivre : « lorsque deux programmes de calcul ne sont pas équivalents, peut-on trouver une ou des valeurs pour lesquelles ils donnent néanmoins le même résultat ? » La réponse conduit à résoudre des équations du 1^{er} degré ou s'y ramenant, à rencontrer les identités remarquables comme facilitatrices de factorisations lorsque les polynômes ne sont plus du 1^{er} degré. D'autres questions suivront : « Lorsque deux programmes de calcul ne sont pas équivalents, peut-on trouver les valeurs pour lesquelles l'un est plus grand que l'autre ? Et comment varient des programmes de calcul différents ? » Ce qui conduit à l'étude des inéquations et à l'abord de la variation des fonctions.

On peut ainsi faire vivre auprès des élèves, et sur un temps long, des mathématiques du programme étudiées comme réponses à des questions qu'ils explorent, dont la recherche leur est dévolue et permet la rencontre des raisons d'être du savoir, en atténuant les effets de saccades et de ruptures résultant d'un enseignement cloisonné en chapitres le plus souvent mathématiquement immotivés. C'est alors un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) courant sur plusieurs années du cursus, généré dans ce cas par l'une des raisons d'être de l'algèbre élémentaire et débouchant sur l'étude des variations de grandeurs.

III. Éprouver les raisons d'être des équations et la construction d'une technique de résolution

Notre travail trouve place dans une forme de recherche collaborative associant, au sein du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, chercheurs et professeurs de mathématiques du second degré (Desgagné, 1997).

Cette organisation implique le respect d'un certain nombre de contraintes, notamment de l'une de celles relativement fortes dans le système éducatif français, qui consiste à respecter le programme officiel et sa progressivité ; contrainte renforcée par le fait que les élèves changent généralement de professeur de mathématiques en passant dans la classe supérieure, et que ce dernier a besoin de connaître ce qui a été précédemment enseigné. Par exemple, en classe de 5^e (élèves de 12 à 13 ans), l'enseignement des nombres relatifs prescrit par le programme est limité

à leur définition, l'addition, la soustraction et l'ordre, et est peu connecté au reste des mathématiques du programme⁶. Un tel enseignement est ainsi sensiblement éloigné des besoins que ces nombres permettent de satisfaire lorsqu'on se lance dans des calculs algébriques.

Par exemple, il n'est pas possible de faire rencontrer en 5^e la nécessité des relatifs pour prolonger des opérations connues, comme le produit dans des expressions telles que $2x - 5(x - 2)$. Bien que la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction soit enseignée en 5^e, elle est restreinte à $\mathbb{N}$ ou à $\mathbb{D}_+$: la mise en facteur nécessitée par un calcul comme $3x - 5x$ ainsi que la multiplication des relatifs pour développer $-5(x - 2)$ ne sont enseignées que dans la classe supérieure, en 4^e (élèves de 13 à 14 ans). Ces prescriptions, inscrites dans la progressivité du programme, sont portées par les professeurs qui les respectent et contraignent en retour les choix de transpositions didactiques possibles et donc de questions et de situations.

Pour l'enseignement des équations du 1^{er} degré à une inconnue, au programme de la classe de 4^e — bien que les élèves aient déjà rencontré dans les classes qui précèdent —, et souvent écrites sous d'autres formes, des équations du type $a + x = b$ et $a \times x = b$, nous sommes néanmoins partis d'une proposition trouvée dans un projet de document d'accompagnement d'un ancien programme, édité par le ministère de l'Éducation Nationale⁷. Nous l'avons transformée afin qu'elle puisse vivre plus longtemps en classe et générer davantage de mathématiques. Elle s'inscrit dans la suite d'une entrée dans l'algèbre qui s'appuie sur la modélisation des programmes de calcul.

Il est souvent difficile de s'engager dans des processus de changement. C'est le cas pour les élèves lorsque le saut apparaît trop grand. Or celui qui consiste à « modéliser » est d'un prix élevé et doit être justifié par le bénéfice qu'il procure. Aussi l'algèbre enseignée en classe de 5^e comme modélisation de programmes de calcul, tant pour les nombres relatifs que pour les écritures littérales, est-elle rapidement oubliée par les élèves arrivés en classe supérieure de 4^e. L'arithmétique reprend ses droits lorsqu'ils se retrouvent face à des programmes de calcul. Cet oubli est aussi une chance pour une reprise, sous un jour nouveau, de la nécessité de la modélisation algébrique.

Nous proposons aux élèves de s'engager dans la résolution d'une classe de problèmes pour lesquels nous savons qu'ils recourront jusqu'à l'impasse à des techniques de résolution non algébriques. Trois spécimens, dont nous donnons ici le premier, sont bâtis sur le même scénario évoqué et extrait du document cité en note de bas de page n° 7, au sein duquel on fait varier les valeurs des variables didactiques⁸. Le premier problème est le suivant :

Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice,

⁶ La classe de 5^e débutant le cycle 4, le programme de 2015 mentionne ainsi, p. 370 : « Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient, et, quand ces notions ont été bien installées, ils font le lien avec le calcul littéral ». Rien n'est dit, dans cet extrait comme ailleurs, quant à la raison, mathématique ou autre, pour laquelle il faudrait rendre « possibles toutes les soustractions », ni comment faire pour que les élèves « généralisent » les opérations, « passent » au produit et quotient, fassent « le lien avec le calcul littéral »... Ce qui est l'objet de cet article, à l'opposé d'un enseignement qui montre et impose sans se préoccuper de transposer des raisons à l'origine du savoir et auxquelles faire se confronter les élèves !

⁷ Il s'agit du *Projet de document d'accompagnement* intitulé *Du numérique au littéral*, daté du 6 janvier 2006.

⁸ Lien vers la ressource :

<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme/>

Alice lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

Les élèves se lancent immédiatement dans des tests de valeurs pour trouver le nombre cherché, en utilisant pour cela des entiers naturels. Leur quête est vaine puisque la solution est -3 (dans l'une des dernières versions de ce problème, à la demande des professeurs, nous avons changé le texte afin que -3 n'annule pas simultanément les programmes A d'Alice et B de Bertrand). Devant l'abondance des résultats fournis par les élèves, le professeur propose d'ordonner les essais selon les valeurs testées, par exemple grâce à un tableau. Sa lecture fournit une indication importante qui permet d'envisager la solution : les valeurs trouvées pour A et B décroissent simultanément lorsque les nombres testés décroissent et elles « se rapprochent ». D'où une solution qui sera, si elle existe, inférieure à 0. Les élèves rencontrent, de nouveau « en acte », la notion de fonction ; plus précisément celle de variations de fonctions.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	28	35	42	49	...
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	13	15	17	19	...

Tableau 1 : Test de valeurs entières positives.

Ceux des élèves qui se souviennent que les nombres ne se réduisent pas aux seuls entiers naturels envisagent alors les négatifs et trouvent -3 . Ce résultat diffuse dans la classe.

Un deuxième problème décrivant le même scénario leur est proposé. Il a été conçu pour que tout nombre soit solution de l'équation associée car $A(x)=(x+2)^2$ et $B(x)=(x-2)^2+8x$; expressions algébriques que les élèves ne savent pas ou n'ont pas l'idée d'écrire. L'étonnement provoqué dans la classe par le fait qu'il y ait un très grand nombre — certains disent une infinité — de solutions fournit l'occasion d'un retour sur la solution du problème précédent : s'il existe des problèmes pour lesquels tous les nombres sont solutions, comment être sûr que la solution trouvée pour le premier problème est unique ? La poursuite du calcul pour des valeurs en deça de -3 dans le tableau semble suggérer l'impossibilité d'une nouvelle coïncidence entre $A(x)$ et $B(x)$ car leurs valeurs s'écartent de plus en plus ; de même en est-il pour les valeurs positives. L'absence de connaissance sur les variations des fonctions affines, étudiées l'année suivante, ne permet pas de trancher rigoureusement cette question. Néanmoins, l'idée commence à vivre qu'il serait utile de trouver une technique qui, tout en nous fournissant la solution, nous renseigne sur son éventuelle unicité.

Le troisième problème, du même type que les précédents, est modélisable par l'équation $11x+5=4x+9$, dont la solution est le rationnel non décimal $\frac{4}{7}$.

Les élèves se lancent de nouveau dans des tests de valeurs dont les résultats sont consignés dans un tableau. Maintenant que l'attention a été attirée sur l'observation de la variation des valeurs de $A(x)$ et $B(x)$, les élèves repèrent la place de la solution : elle est comprise entre 0 et 1. Le professeur demande d'explicitier les raisons qui conduisent à cette conclusion et suggère de

rajouter une ligne qui mesure « l'éloignement », qu'on notera « écart », entre les valeurs de $A(x)$ et $B(x)$ puisque cet « écart » a joué un rôle dans le premier problème ; ce qui fournit, par exemple, le tableau suivant :

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	...	-28	-17	-6	5	16	27	38	...
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	...	-3	1	5	9	13	17	21	...
Écart $A-B$	...	-25	-18	-11	-4	3	10	17	...

Tableau 2 : Test de valeurs « entiers relatifs » et évaluation de l'écart.

Les élèves se lancent dans des tests pour des valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Tout d'abord pour des décimaux tronqués au dixième : 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; ... ; 0,9. Certains d'entre eux s'aperçoivent qu'il suffit de procéder par dichotomie, mot qu'ils ne connaissent évidemment pas mais technique dans laquelle ils s'engagent « spontanément », et d'évaluer en valeur absolue l'« écart » pour déterminer le nouvel intervalle dans lequel tester des valeurs. On en arrive à conclure que la solution est comprise entre 0,5 et 0,6. Les élèves conviennent de la nécessité de poursuivre par dichotomie. Les valeurs sont dans un premier temps tronquées au centième. Comme on constate que l'« écart » n'est pas nul et qu'il va donc falloir tester avec des valeurs au millième, voire plus loin, le professeur suggère d'utiliser un tableur pour la poursuite de la recherche. Elle aboutit à trouver 0,57142857 sans que l'on obtienne encore un « écart » nul.

Au cours du travail ainsi mené, les élèves ont utilisé « en acte » le théorème des valeurs intermédiaires, l'« écart » oscillant entre des valeurs positives et négatives, et appréhendé l'idée de limite : l'« écart » se rapproche de 0, tandis qu'on s'approche de la solution, sans pour autant que l'on puisse atteindre ces deux valeurs. L'idée se répand que l'on ne parviendra pas à trouver la solution exacte avec le tableur, voire que la solution n'est pas décimale. Les élèves conviennent que la technique par tests de valeurs doit être abandonnée car sa portée est limitée.

C'est alors l'occasion de tenter une autre technique qui repose sur la modélisation algébrique. Les élèves sont invités à écrire les programmes de calcul d'Alice et Bertrand sous forme littérale, soit $11x+5$ et $4x+9$; ce que certains élèves savent faire depuis la classe précédente. Mais comment trouver la valeur de x recherchée dont on ne doute pas de l'existence ? Une institutionnalisation locale, faisant le point sur les tentatives précédentes, permet d'ouvrir une piste. Elle indique que l'on a constaté, grâce au tableur, que l'« écart » diminue, même si l'on n'est pas parvenu à l'annuler. Les questions portées par le professeur, si ce n'est par les élèves, deviennent : jusqu'à combien va-t-il diminuer ? Et par suite, à quoi sera égal cet « écart » lorsqu'on aura trouvé la solution ?

Ce point permet au professeur de poursuivre le questionnement : quand deux nombres sont égaux, à quoi est égale leur différence ? Et à quelle condition sur la différence sait-on quand deux nombres sont égaux ? On aboutit à un théorème important et fort utile qui lie égalité et différence : $(a-b=0) \Leftrightarrow (a=b)$ (1).

Les élèves sont ainsi conduits à résoudre non pas l'équation $11x+5=4x+9$ mais, de manière

techniquement plus simple et en s'appuyant sur (1), l'équation : $11x+5-(4x+9)=0$. C'est l'occasion de fournir une raison d'être supplémentaire à la nécessité de simplifier des expressions algébriques, dans ce cas supprimer les parenthèses précédées du signe « - », et ce travail conduit à l'équation $7x-4=0$. Cette dernière équivaut à son tour, et d'après la relation (1), à $7x=4$. La définition du quotient de deux nombres, enseignée deux années auparavant en classe de 6^e, fournit la réponse $\frac{4}{7}$.

Cette manière de faire permet, dans un premier temps, d'élaborer la technique en évitant le recours à la transposition des termes dans une équation, souvent confondue avec la division par les élèves, ou la confusion dans le changement de signe ; erreurs qui perdurent longtemps. Par ailleurs, par retour à l'équivalence (1) dans les sens direct et réciproque, elle assure un contrôle systématique de ce qui reste à faire à chaque étape de la résolution⁹. La dimension technologique fournie par la relation (1) permet une anticipation rationnelle des pas à accomplir pour la mise en œuvre de la technique. On retrouve en ce point les propos de Clairaut : grâce à

quelques signes simples, avec lesquels, quelque'avancés qu'ils fussent dans la solution d'un problème, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avaient fait et ce qu'il leur restait à faire.

Lorsque la technique exposée ci-dessus a été longuement travaillée et que les élèves en possèdent une bonne maîtrise, certains d'entre eux s'autorisent à gagner une étape en transposant les termes afin d'isoler l'inconnue dans un membre et la constante dans l'autre, mais pas avant. La technique qui vient d'être exposée, bâtie sur la relation (1), est aussi enseignée dans la classe de niveau supérieur, la 3^e, auprès d'élèves qui, n'ayant pas été enseignés ainsi dans la classe précédente de 4^e, continuent de buter sur les confusions qu'ils commettent en transposant ou divisant dans la résolution d'une équation.

Bien qu'il soit nécessaire que les élèves sachent sans se tromper supprimer des parenthèses précédées du signe « - », ce qui fournit une nouvelle occasion pour connaître et travailler cette technique, les professeurs préfèrent recourir à l'enseignement de cette résolution des équations. La raison essentielle, au-delà de raisons intra-mathématiques qui évitent le recours à la métaphore, tient à la réduction constatée du nombre des erreurs commises par les élèves : chaque étape de la mise en œuvre de la technique peut être contrôlée et justifiée par l'élément technologique constitué de la relation (1).

Conclusion : construire des parcours d'étude et de recherche

Les ingénieries de recherche et développement dont on vient d'exposer certaines à propos de l'enseignement des débuts de l'algèbre — il resterait encore à évoquer les inéquations et les équations-produits, puis les fonctions algébriques d'une variable — visent un double objectif. Il s'agit d'une part, en ce qui concerne le volet recherche, de déterminer sous quelles conditions il est possible de faire vivre, dans le second degré, un enseignement des mathématiques engageant les élèves dans une dynamique de genèse du savoir par la recherche collective d'éléments de réponses à une question qu'ils ont, sous la direction d'un professeur, la responsabilité d'instruire. D'autre part, de faire en sorte que cette question soit suffisamment ample pour générer non pas un seul sujet ou un seul thème mathématique d'un programme donné, mais plusieurs secteurs ou

⁹ La transposition des termes, enseignée souvent de manière métaphorique par recours à une balance Roberval dont plus grand monde n'a l'usage domestique, repose évidemment sur cette relation. Mais elle n'est généralement pas enseignée. Or la relation (1) $(a=b) \Leftrightarrow (a-b=0)$ justifie et produit, comme l'on sait, les équivalences : $(a=b) \Leftrightarrow (a+c=b+c)$ et si $c \neq 0$, $(a=b) \Leftrightarrow (a \times c = b \times c)$.

un domaine, au cours d'un processus s'étendant sur plusieurs années du cursus. Autrement dit, et cela constitue le volet développement, d'engager les élèves dans un travail mathématique de recherche qui, tout à la fois, possède une certaine épaisseur épistémologique et évite le cloisonnement provoqué par la décomposition du programme en chapitres apparaissant déconnectés les uns des autres.

Une telle décomposition est inscrite dans l'organisation des manuels scolaires, et reproduite par les professeurs dans leurs classes, à partir d'activités de faible consistance mathématique qui induisent une forme didactique reposant sur l'ostension déguisée (Berthelot & Salin, 1992)¹⁰. Dans le cas d'un tel enseignement dont les effets sur les apprentissages méritent d'être interrogés, le travail préalable mené par le professeur ou par les auteurs des manuels consiste à découper un secteur ou un domaine mathématique (par exemple l'algèbre) en autant de sujets qu'auront à étudier les élèves. Du point de vue des élèves, établir des liens entre les divers chapitres ainsi rencontrés suppose une réorganisation, afin de parvenir à construire des agrégations ou des amalgames d'organisations mathématiques constitutives du secteur ou du domaine. Ils retrouvent alors une cohérence globale et, à partir d'elle, un certain sens à l'enseignement dispensé. Mais un tel travail, mené par certains élèves — généralement ceux qui réussissent en mathématiques —, est le plus souvent d'ordre privé, car non assumé publiquement par l'enseignement au sein de la classe. Soumises à une telle organisation didactique, les différences interindividuelles interviennent de manière cruciale dans la constitution de rapports au savoir différenciés d'un élève à un autre, et risquent fort d'aboutir à l'échec ou au rejet de l'étude des mathématiques.

À l'opposé d'une telle organisation de l'enseignement, nous partons d'une question beaucoup plus large, reprise ou déclinée en plusieurs fois lors de sa dévolution aux élèves, qui générera les mathématiques à enseigner pour tout un secteur ou un domaine : par exemple celui de l'algèbre élémentaire pour ce qui vient d'être exposé. Pour ce faire, une étude épistémologique préalable est nécessaire, qui vise à répondre à la question « d'où vient l'algèbre élémentaire et à quelle(s) question(s) répond-elle ? » (et non pas seulement « d'où vient tel sujet ou tel thème comme, par exemple, les développements-factorisations, les identités remarquables ? »). La réponse, nécessairement de nature épistémologique, ne peut être délivrée telle quelle aux élèves mais doit être transposée et instillée dans des situations bâties autour d'une question génératrice du domaine, déclinée en plusieurs fois.

Dans le cas de l'algèbre élémentaire, on l'a vu, il s'agit de faire calculer d'une manière plus économique sur des programmes de calcul et, pour cela, de faire en sorte que les élèves soient contraints de recourir à une modélisation algébrique. Celle-ci apparaît alors comme une nécessité. D'autres questions viennent ensuite qui, portant sur des programmes de calcul, trouvent à leur tour une réponse à partir d'une modélisation algébrique. Elles sont engendrées par l'étude de la question génératrice qui ne peut être posée telle quelle aux élèves, mais par sa déclinaison. L'avancée du temps didactique n'est plus seulement portée par le discours du professeur qui expose un savoir comme réponse à une question n'ayant en définitive pas vécu dans la classe, mais par le processus engendré par l'engagement dans la recherche et le développement d'une même question, reprise en plusieurs fois. Dans ce cas : comment modéliser des programmes de calcul, comment établir leur équivalence, comment déterminer la ou les valeurs qui les font coïncider lorsqu'ils ne sont pas équivalents ou en rendent un inférieur à

¹⁰ Les élèves sont actifs, mais la situation qu'ils travaillent ne permet pas de faire émerger le savoir visé. Le professeur est alors contraint de le leur montrer, tout en leur faisant croire qu'ils l'ont eux-mêmes construits, autrement dit en masquant qu'il le montre. D'où le terme d'ostension déguisée.

l'autre, comment étudier la manière dont ils varient ?

Au lieu de construire un enseignement qui repose sur des activités ou des chapitres isolés et déconnectés, on obtient ainsi un enseignement intégré sous forme de parcours, car il court sur plusieurs années et repose sur le développement d'une question. Cette étude est dévolue aux élèves sous la direction du professeur, et nécessite leur engagement dans une recherche. Elle doit effectivement aboutir à une étude des mathématiques par la construction collective d'un savoir organisé et la possession de sa maîtrise. Un tel type d'enseignement se réalise au sein de Parcours d'Étude et de Recherche (PER) dont la finalité réside dans l'apprentissage des mathématiques du programme. Un travail du même type peut être mené pour d'autres domaines des mathématiques : géométrie, probabilités, statistique, étude des fonctions, *etc.*

Références bibliographiques

- Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique : un essai de synthèse. In Margolinas et al. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble : La pensée sauvage.
- Bernad, K. (2017). *Une contribution à l'étude de conditions et contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche au collège*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.
- Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux I.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Brousseau, N. & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie : l'évolution de la transposition didactique, *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x*, 19, 43-75.
- Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, 23, 5-38.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2005). *Journal du séminaire DSMF*, non publié.
- Chevallard, Y. (2018). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological

- theory of the didactic. *Conférence inaugurale pour CITAD VI*, Autrans, 22-26 janvier 2018 (à paraître).
- Chevallard, Y. et al. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche. *Brochure n° 16 de l'IREM d'Aix-Marseille*.
- Clairaut, A.-C. (1760). *Elémens d'algèbre*, 3^e éd. Paris : Durand.
- Combier, G, Guillaume, J.-C. & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège*. INRP.
- Coulange, L. & Grugeon, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre, *Petit x*, 78, 5-23.
- Descartes, R. (1701, 1996). *Règles pour la direction de l'esprit*, traduction et notes par J. Sirven. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.
- Descartes, R. (1637). La géométrie.
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29040s/f98.image>
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- Gascón, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- Geoffroy, C. (2014). *Les programmes de calcul au collège*. Mémoire de M2 - Master Didactique des sciences de l'Université Joseph Fourier, soutenu le 7 juillet 2014.
- Gobert, S. (2011). *Une ingénierie didactique pour le développement. Pratiques de description de formes géométriques à l'école maternelle*. In Margolinas et al. (Eds) En amont et en aval des ingénieries didactiques (pp. 283-304). Grenoble : La pensée sauvage.
- Krysinska, M. (2007). *Émergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques*. Thèse des facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Presses Universitaires de Namur.
- Krysinska, M., Mercier, A. & Schneider, M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(3), 247-303.
- Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques, une approche didactique à caractère anthropologique*. Presses Universitaires de Rennes.
- Matheron, Y., Noirfalise, R. & Combelles, C. (2006). Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques. Quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique. *Petit x*, 70, 30-47.
- Méjani, F. (2018). *Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du*

premier degré. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Mercier, A. (1995). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 97-142.

Vergnaud, G. (1980). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Peter Lang.