

Mais quel montant peut on obtenir ?
 En prenant seulement deux pièces dans notre porte-monnaie non échangé, on ne peut pas excéder le montant 1€ (un pair de 7 et une pièce de $\frac{1}{2}$).
 Si le montant que l'on veut obtenir est $\frac{1}{n}$ on peut le obtenir en prenant des pièces qui lui correspondent.

← Le PORTE-MONNAIE →
 INFINIE
 ∞

Quelles pièces choisir pour obtenir un montant $\frac{1}{n}$?
 Si le montant que l'on veut obtenir est $\frac{1}{n}$ et que n est pair alors on peut trouver la plus petite pièce de valeur $\frac{1}{n}$.
 $\frac{2 \times 2}{n \times 2} = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

$1 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6}$
 Monnaie impossible d'un porte-monnaie infini.
 by Robert Metcalfe et al.

n est impair alors il faudra 2 pièces de 1 non identiques pour obtenir un montant $\frac{1}{n}$.
 Calcul de la pièce n°1 : la plus petite pièce possible est $\frac{1}{n}$ car $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$.
 Calcul de la pièce n°2 : la plus petite pièce possible est $\frac{1}{n}$ car $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$.
 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ que pour n=2 on a $\frac{2}{n} = 1$.
 Démonstration que deux pièces de 1 ne peuvent pas donner un montant $\frac{1}{n}$ pour n impair.
 $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+2} < \dots$
 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} < \dots$
 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} < \dots$
 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} < \dots$

CARRÉS EN CARRÉ

Sujet: Peut-on découper deux carrés pour former un carré?

A) deux carrés identiques
 → angles de 90°
 → tous deux de côté L .

B)

C) Carrés quelconques?

1) - on utilise la méthode heuristique - on découpe et on rassemble en pièces - ça ne fonctionne pas

2) - on les superpose - on les découpe - on les place - ça ne fonctionne pas

Carrés avec des relations de proportionnalité

Peut-on continuer à l'infini?

Aire $C_2 = 2 \times \text{Aire } C_1$
 Aire $C_3 = 3 \times \text{Aire } C_1$
 ...
 Aire $(C_n) = n \times (C_1)$

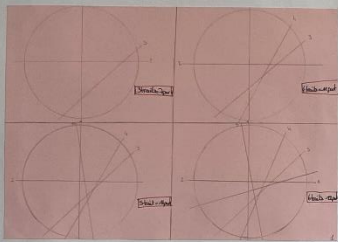
D)

$(D = D)$ $(D = D)$ $(L, l, c^2) R = c_3 = c_2$
 $c_3 = c_2 + c_1 = \frac{L^2 - l^2}{L - l}$
 - à l'aide du sujet d'aujourd'hui, on peut arriver

Elodie
 Lorelia 3⁰²
 Ines

PROBLEME DE PARTAGE D'UN GATEAU

On se donne un gâteau rond. On coupe avec n coups de couteaux verticaux, de sorte que chaque coupe de couteaux rencontre les lignes de coupes précédentes et qu'aucun point de gâteau ne soit traversé par plus de deux lignes de coupes. Combien de parts forme-t-on ?



Résultats des parts

2 traits = 4 parts } 3 en +
 3 traits = 7 parts } 4 en +
 4 traits = 11 parts } 5 en +
 5 traits = 16 parts }

FORMULE n°1

$$p(t) = t + p = t + p(t-1)$$

exemple :
 $p(6) = 6 + 16 = 6 + p(5)$
 $p(6) = 22$

$p(t)$: nombre de parts pour t trait
 p : nombre de parts précédentes
 t : nombre de traits

Formule dépendant de t

exemple : $p(5) = 5 + p(4)$
 $= 5 + (4 + p(3))$
 $= 5 + 4 + (3 + p(2))$
 $= 5 + 4 + 3 + 2 + p(1)$
 On obtient : $p(t) = t + (t-1) + \dots + (t-1) + p(1)$
 $= t + (t-1) + \dots + (t-1) + 1$

$$p(t) = \sum_{k=1}^t k + p(1) - 3 \quad \text{avec } p(1) = 1$$

METHODE CALCUL

formule : pour composer de $\frac{t}{2}$ à t
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$

exemple 1 :
 $1+2+3+4+5+6+7 = 28$
 $2+3+4+5+6+7 = 27$
 $3+4+5+6+7 = 25$
 $4+5+6+7 = 22$
 $5+6+7 = 18$
 $6+7 = 13$
 $7 = 7$

exemple 2 :
 $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$
 $2+3+4+5+6+7+8 = 34$
 $3+4+5+6+7+8 = 33$
 $4+5+6+7+8 = 30$
 $5+6+7+8 = 26$
 $6+7+8 = 21$
 $7+8 = 15$

METHODE GEOMETRIQUE

On voit passer :
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$

On change la somme de t à 1 :
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$
 $\sum_{k=1}^t k = \frac{t}{2} \times (t+1)$

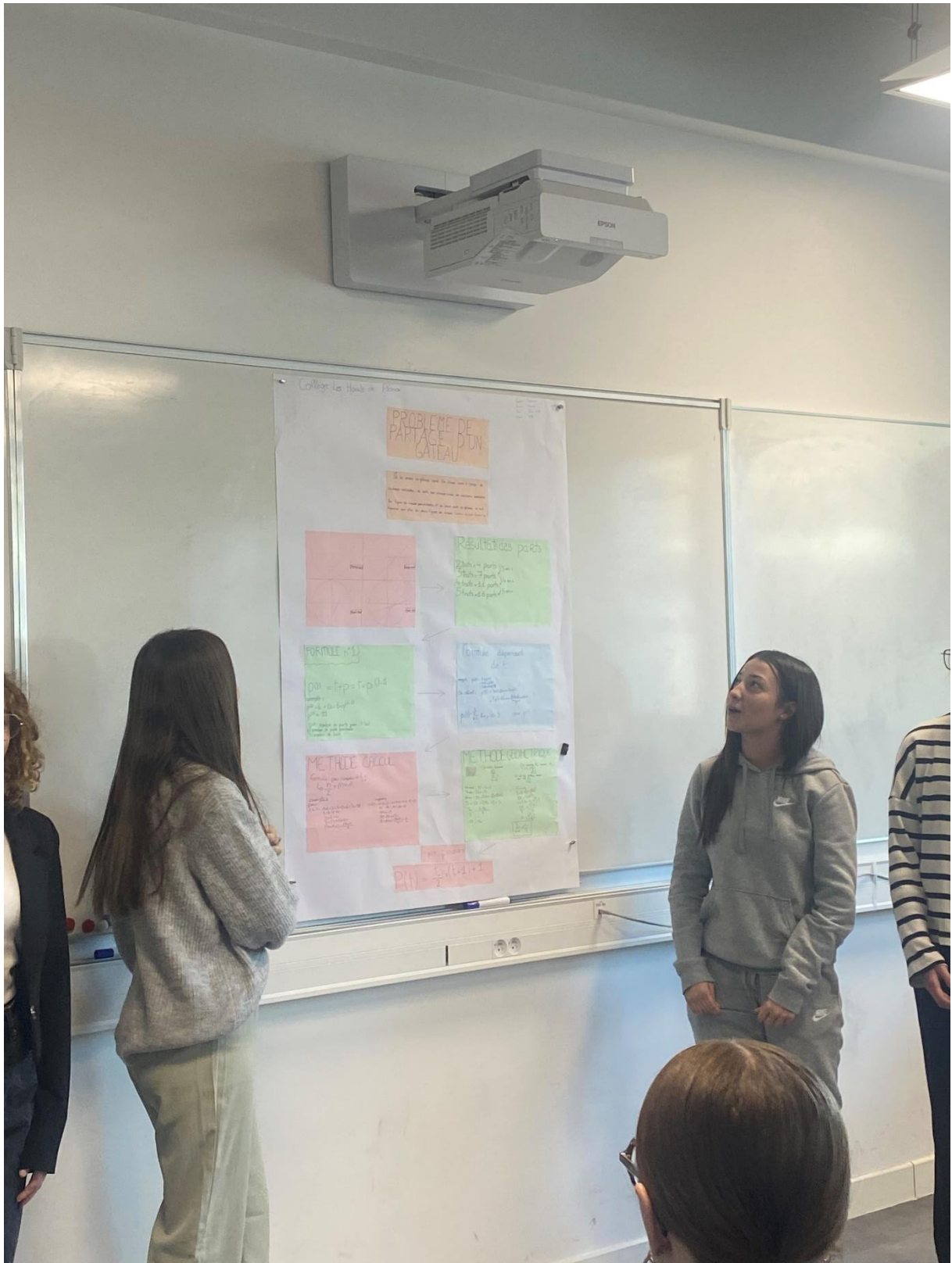
$$p(t) = \frac{t}{2} (t+1) + 1$$

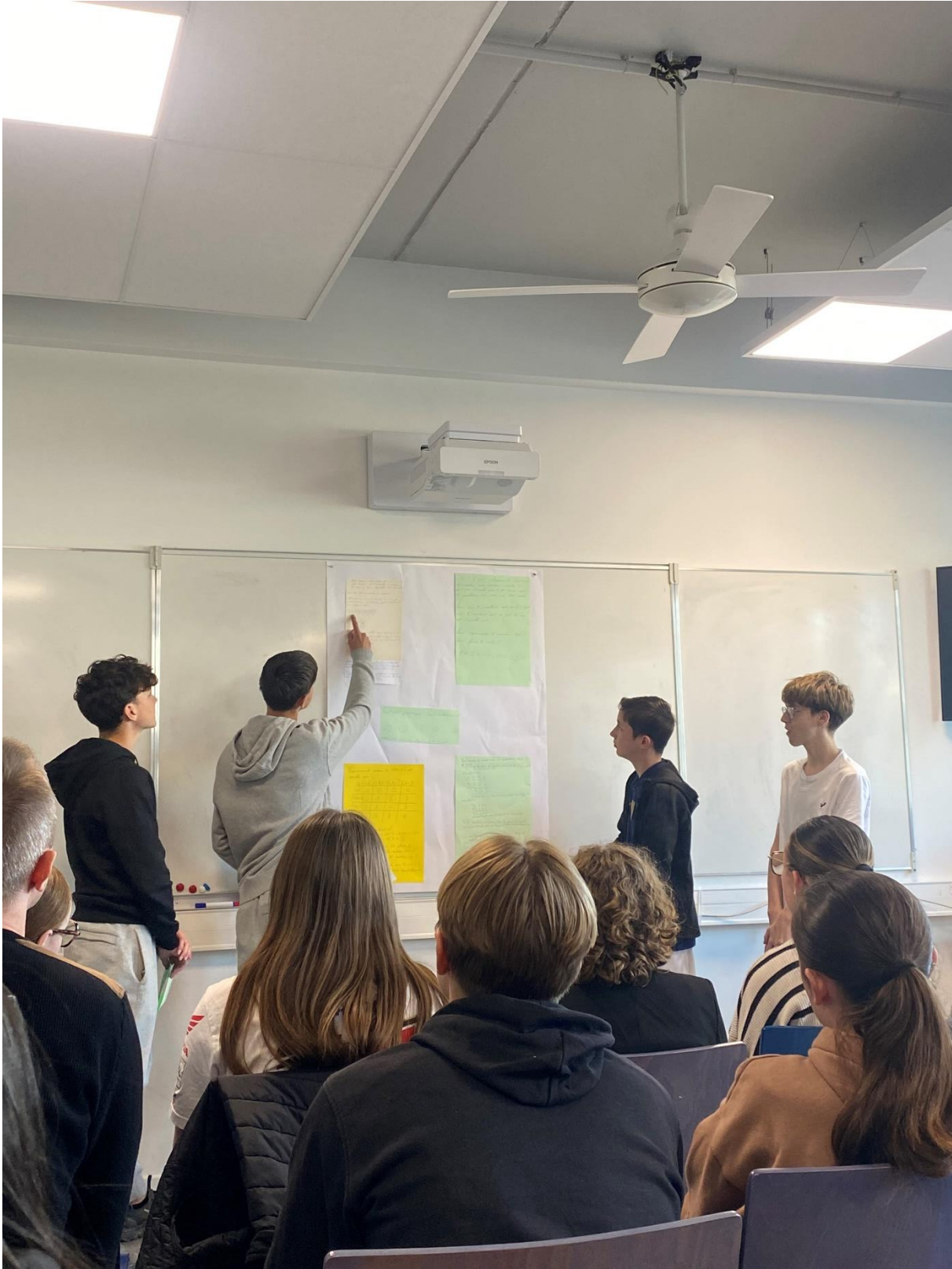
$$P(t) = \frac{t}{2} \times (t+1) + 1$$



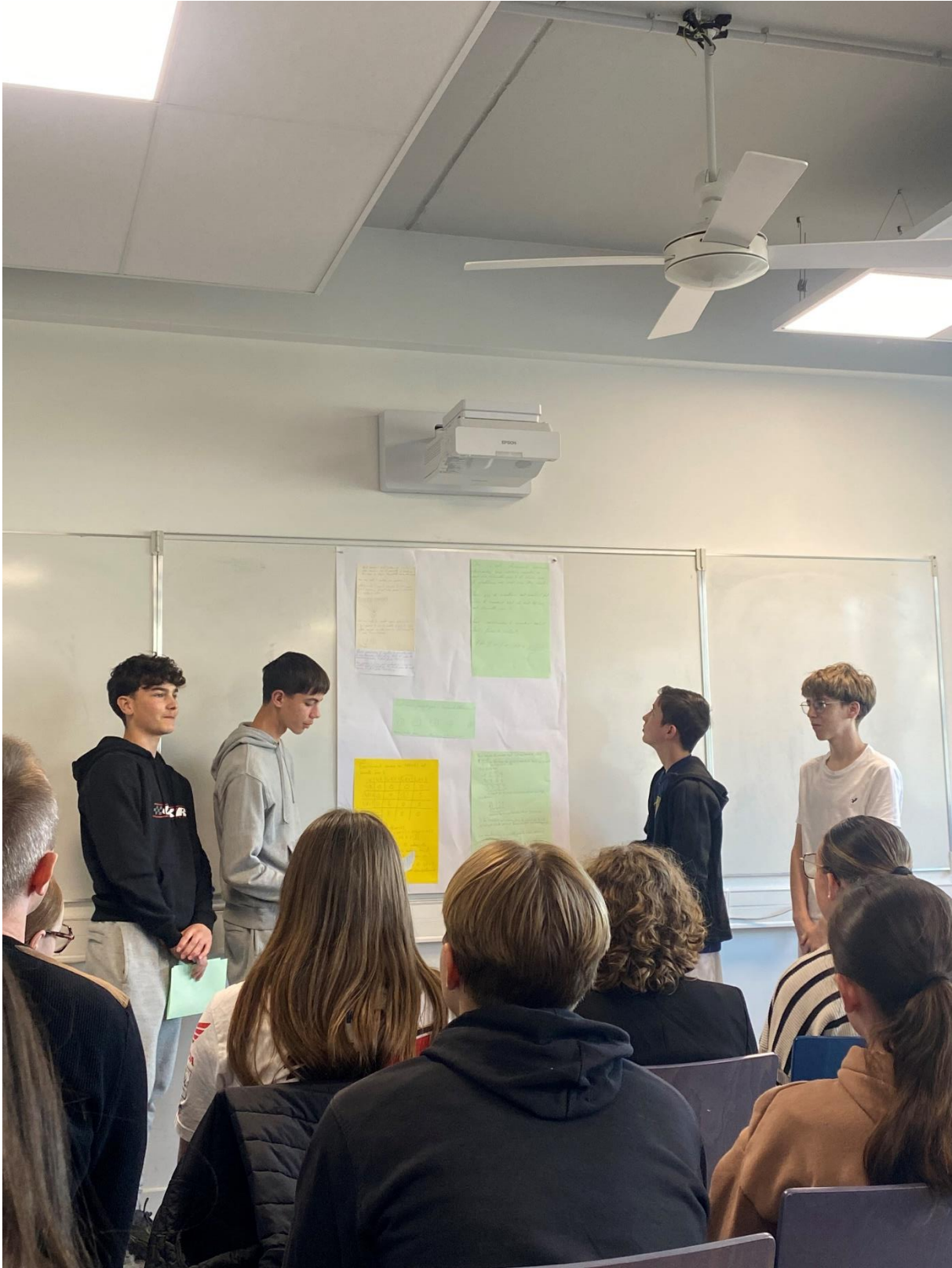












Soit deux entiers consécutifs $1, 2, 3, \dots, n$
 ou deux entiers consécutifs $1, 2, 3, \dots, n$
 les deux cas se font également (sans la main)

Pour une suite de nombres pairs supérieurs à 2 :

utilisons le 1^{er} cas & divisons le 2nd cas
 Pour un nombre... il continue jusqu'à utiliser
 les 2 nombres de suite.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

(4)

Dans une suite de nombres pairs supérieurs à 2
 il faut diviser le dernier nombre et faire le même
 travail qui peut se faire en utilisant le
 1^{er} cas l'autre cas.

1 2 3 4 5

Pour connaître le nombre de paquets pour
 le nombre pair N il faut faire $N/2$ et pour le
 nombre impair N il faut faire $(N+1)/2$

Pour savoir si on peut partager 2, on a
 un nombre pair il faut faire $N/2$ et pour le nombre
 impair, il faut faire $(N+1)/2$

On s'est demandé comment
 démontre que certains nombres ne
 sont pas divisibles par 4 et donc que
 le problème ne peut pas être résolu.

Pour que le problème soit résolu, il faut
 que le montant total de tout les sacs
 soit divisible par 2

Pour connaître le montant total, il
 faut faire le calcul.

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Peut-on partager équitablement?

① ② ③ ④ ... ⑩

Uniquement si le nombre est divisible par 4 ou par 2.

Comment savoir si $N(N+1)$ est
 divisible par 4

X	4k	4k+1	4k+2	4k+3
4k	0	0	0	0
4k+1	0	1	2	3
4k+2	0	2	0	2
4k+3	0	3	2	1

Exemple $(4k+1)(4k+2)$
 $4k \times 4k + 4k \times 2 + 2 \times 4k + 1 \times 2$
 $16k^2 + 12k + 2$

- si le résultat est de 0 alors le
 montant total pourra être divisé en 2
- Sinon on pourra pas le diviser en 2
- La conclusion, si $N=4k$ ou $N=4k+3$
 alors on peut partager les sacs équitablement
 en 2

Pour trouver le nombre total nous avons besoin de calculer
 $\frac{N(N+1)}{2}$ = Nombre de sacs X montant dans un paquet
 $= 4 \times 1234 + 112$
 EDC DSN pain

1 2 3 4
 8 7 6 5
 3 3 3 3

4 paquets de 3 $\rightarrow 4 \times 1234 + 8 = 5 \times 4 = 36$

Ex: N pain:

1 2 3 4
 8 7 6 5
 3 3 3 3

5 paquets de 3 $\rightarrow 4 \times 1234 + 5 = 3 \times 5 = 45$

Si le résultat est impair, donc le montant total
 n'est pas divisible par 4 et donc on ne peut pas partager.

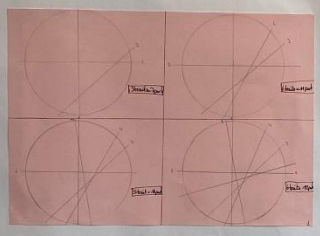
Le résultat sera toujours pair après le 2nd cas car
 Pour pair pair
 impair pair impair

car N et $N+1$ sont des entiers consécutifs c'est pour
 cela que le résultat est toujours pair



PROBLEME DE PARTAGE D'UN GATEAU

On se donne un gâteau rond. On coupe avec n coups de couteaux verticaux, de sorte que chaque coupe de couteaux rencontre les lignes de coupes précédentes et qu'aucun point de gâteau ne soit traversé par plus de deux lignes de coupes. Combien de parts forme-t-on ?



Résultats des parts
 2 traits = 4 parts } 3 en +
 3 traits = 7 parts } 4 en +
 4 traits = 11 parts } 5 en +
 5 traits = 16 parts } 5 en +

FORMULE n°1

$$p(t) = t + p = t + p(t-1)$$
 exemple :
 $p(6) = 6 + 16 = 6 + p(5)$
 $p(0) = 1$
 p : nombre de parts pour t trait
 $p(0)$: nombre de parts précédentes
 t : nombre de traits

formule dépendant de t
 exemple : $p(5) = 5 + p(4)$
 $= 5 + 11 = 16$
 $= 5 + 1 + 4 + 6$
 On obtient : $p(t) = 1 + (t-1) + 3 + p(t)$
 $= t + (t-1) + \dots + (t-2) + p(t-3)$

$$p(t) = \frac{t}{2} \times (t+1) + 1$$
 avec $p(0) = 1$

METHODE CALCUL
 formule : pour composer de $\frac{n}{2}$
 $\frac{n}{2} \times (n+1)$
 exemples :
 pour $n=6$: $1+2+3+4+5+6+7 = 28$
 $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$
 pour $n=5$: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = 66$
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78$

METHODE GEOMETRIQUE
 On voit passer :
 $\sum_{k=1}^n k$
 On change de somme de $1 \times 1 + 0$
 On change de somme de $1 \times 1 + 0$
 On change de somme de $1 \times 1 + 0$
 $15 = 4n$

$$p(t) = \frac{t}{2} \times (t+1) + 1$$

$$P(t) = \frac{t}{2} \times (t+1) + 1$$

CARRÉS EN CARRÉ

Sujet: Peut-on découper deux carrés pour former un carré?

deux carrés identiques
 → on les met en c_1
 → haut deux de côté L .

Aire c_2

Carrés quelconques?

1) on ne peut pas
 → on coupe les carrés en plusieurs parties
 → on dispose et on recolle
 → on ne peut pas

2) on ne peut pas
 → on coupe les carrés en plusieurs parties
 → on dispose et on recolle
 → on ne peut pas

Carrés avec des relations de proportionnalité

Peut-on continuer à l'infini?

c_3
c_2
c_1

Aire $c_2 = 2 \times \text{Aire } c_1$
 Aire $c_3 = 3 \times \text{Aire } c_1$
 ...
 Aire $(c_n) = n \times (c_1)$

1) 2) 3) on ne peut pas
 → on coupe les carrés en plusieurs parties
 → on dispose et on recolle
 → on ne peut pas

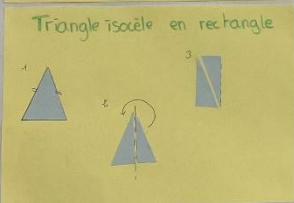
(1) 2) 3) $L^2 = c_1^2 + R \times c_1$
 $c_3 = c_2 + c_1$
 $c^2 = \dots$
 → si on coupe des carrés, on peut continuer

Aire (C_n)

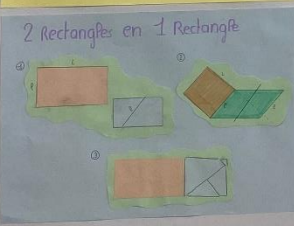
Polygones

Sujet I :
Etant donné un polygone, peut-on le découper en un carré ?

Triangle isocèle en rectangle

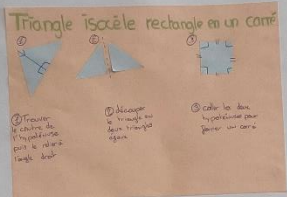


2 Rectangles en 1 Rectangle



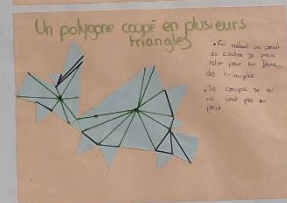
En

Triangle isocèle rectangle en un carré



① Trouver le centre de l'hypoténuse pour le relever
② Découper le triangle en deux triangles égaux
③ Coller les deux hypoténuses pour former un carré

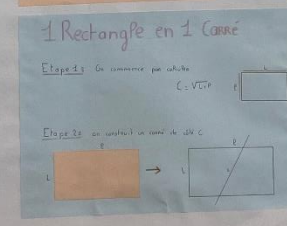
Un polygone coupé en plusieurs triangles



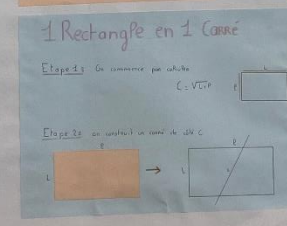
* On réalise un point au centre de chaque côté pour les lignes des triangles
* Les coupes se font en un pas pas au pas

1 Rectangle en 1 Carré

Etape 1: On commence par un rectangle $E = V \times H$

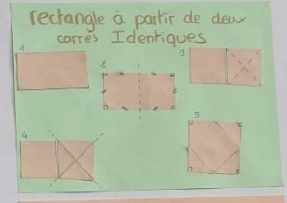


Etape 2: on construit le carré de côté $\sqrt{V \times H}$

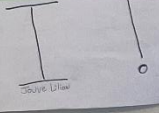
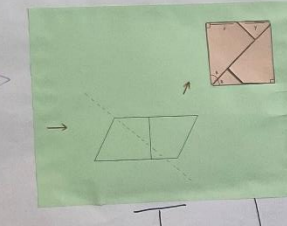
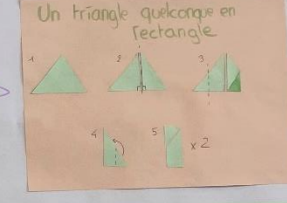


Carré

Rectangle à partir de deux carrés identiques



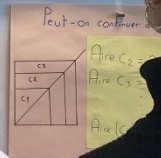
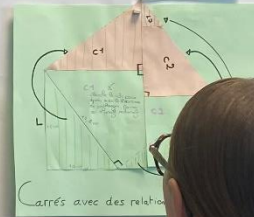
Un triangle quelconque en rectangle



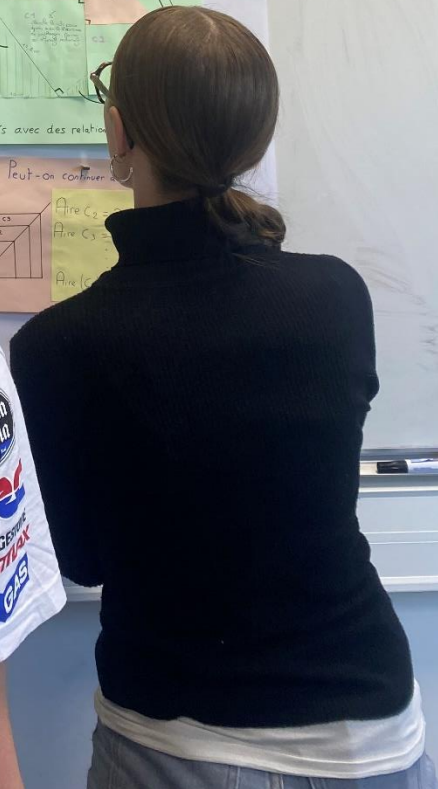
Peut-on découper
des carrés pour
un carré ?

CARRÉS EN CARRÉ

Sujet Peut-on
découper ~~des~~ carrés
pour former un
carré ?



$$Aire(C_n) = n \times Aire(C_1)$$







- 1 impossible
- 2 impossible
- 3 OK
- 4 OK
- 5 impossible
- 6 OK
- 7 impossible
- 8 OK
- 9 impossible
- 10 OK

rien possible
à partir de 4

rien impossible!
possible!
à démontrer!

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 12 \times 9 \\ \hline \end{array}$$

12×4

$$\begin{array}{r} 12365 \\ \hline 12 \times 1029 \\ \hline \end{array}$$

12





