



## MODÈLES ÉPIDÉMIQUES

10%

S → I

$S_0 = 1000$     $I_0 = 100$

$S_1 = S_0 \times 0,9$

$I_1 = I_0 \times (S_0 \times 0,1)$

$S_n = 1000 \times 0,9^n$

$I_n = I_0 + S_0 \times 0,1 (1 + 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^{n-1})$   
 $= I_0 + S_0 (1 - 0,9^n)$   
 $1 + 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^{n-1} = \frac{1 - 0,9^n}{1 - 0,9}$  où  $q \neq 1$

Comment analyser une évolution d'épidémie?

S → I → R

$\alpha$     $\beta$

**EQUATIONS:**

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} S_{n+1} = S_n - \alpha S_n I_n \Delta t \\ I_{n+1} = I_n + (\alpha S_n I_n - \beta I_n) \Delta t \\ R_{n+1} = R_n + \beta I_n \Delta t \end{cases}$$

**CONDITIONS:**

$$\begin{cases} S_0 \geq 0 & \alpha \in ]0, 1] \\ I_0 > 0 & \beta \in ]0, 1] \\ R_0 \geq 0 & S_n = \frac{M}{\alpha} \end{cases}$$

$\Delta t < \frac{1}{\beta}$  et  $\Delta t < \frac{1}{M\alpha}$

$0 \leq S_n \leq M$     $0 \leq I_n \leq M$     $0 \leq R_n \leq M$

$S_0 + I_0 + R_0 = M$     $S_n + I_n + R_n = M$

$S_{n+1} \leq S_n$  décroissant

$R_{n+1} \geq R_n$  croissant

# MODELE DE POPULATION



Suite Fibonacci  
1 1 2 3 5 8 13 21 34

Formule de Fibonacci

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

Pour 20 ans :



Fibonacci

- > 6765 couples de lapins
- > 13850 lapins

Une suite géométrique :

une suite  $u_n$   $n \in \mathbb{N}$  est dite géométrique de raison  $q$  si pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = q u_n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \approx q \quad \left. \begin{array}{l} \text{cela fait penser à une} \\ \text{suite géométrique de raison } q \end{array} \right\}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n) \quad \text{où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

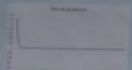
Modèle Logistique

Pour les ressources limitées

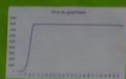
$$u_{n+1} = u_n + \frac{c}{P_0} (P_0 - u_n) u_n$$

$P_0$  = nombre maximum de lapins  
 $c$  = vitesse de reproduction

Si  $P_0 = 1$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = x(1-cx)$



$c = 0,2$   $P_0 = 1$



$c = 0,5$   $P_0 = 8\ 000$



$c = 3$   $P_0 = 8\ 000$