L’enseignement des fractions au collège

Groupe didactique de l’IRES d’Aix-Marseille

2025

Une « fiche de direction de l'étude » pour des professeurs s'appropriant un PER sur les grandeurs et les fractions en 6e, 5e et 4e

Groupe didactique de l'IRES d'Aix-Marseille

La proposition qui suit est bâtie à la suite de divers travaux menés depuis 2021 : des élaborations *a priori*, des observations de passations en classe analysées *a posteriori*. Elles ont été réalisées dans des collèges « standard » : ni REP +, ni « élitistes ». La proposition s'appuie sur une ossature formée d'éléments théoriques en didactique des mathématiques, remplissant une fonction de contrôle épistémologique ; ils ne figurent pas dans ce texte. Seuls sont consignés ***quelques compléments*** propres à certaines séquences, en fin de texte. On peut les consulter pour appréhender la logique de cette proposition et l'analyse de quelques difficultés liées à la notion de fraction. Sinon, on se limitera à la lecture des séquences.

Des reprises et améliorations ont contribué à la rédaction de cette proposition. Elles constituent autant d'indices des difficultés relatives à l'enseignement des fractions, attachées à la notion ***mathématique*** de fraction. Difficultés à rechercher dans les mathématiques, pas dans la tête des élèves ! Aussi, à la contestable « fraction d'objet », repérée à maintes reprises dans des activités de manuels, opposons-nous la rigoureuse notion mathématique de fraction de grandeur. Inutile de rajouter des difficultés d'apprentissage en enseignant des notions erronées (*cf.* le document d'accompagnement *Grandeurs et mesures* de la DGESCO).

La notion de grandeur[1] figure dans les programmes de l'école élémentaire dès le cycle 2. Mais les professeurs constatent, à l'entrée en 6e, que nombre d'élèves n'ont pas établi un rapport satisfaisant à cette notion. Ainsi notre proposition débute par un travail sur les grandeurs continues. Puis, ayant défini une unité, la mesure d'une grandeur, c'est-à-dire un ***nombre***, apparaît sous forme de fraction. Elle « s'autonomise » ensuite de la mesure d'une grandeur particulière et devient « fraction abstraite ». L'étude des opérations repose sur une dialectique « fraction de grandeur / fraction abstraite », les techniques de calcul s'émancipant des grandeurs spécifiques considérées.

Le texte est subdivisé en « séquences » qui correspondent, *grosso modo*, à l'étude d'une organisation mathématique locale : c'est-à-dire à des mathématiques aboutissant à une définition ou une propriété, constitutives de réponse à une question, puis à s'exercer. La durée approximative du temps de travail en classe peut varier d'une passation à l'autre. Une fourchette temporelle sera peut-être donnée ultérieurement, lorsque cette proposition évolutive aura été passée et observée durant plusieurs années et dans divers contextes.

Si on souhaite utiliser cette proposition, dont forme et contenus diffèrent fortement de l'enseignement traditionnellement dispensé, il est indispensable de ***se l'approprier auparavant****. Par exemple en notant pour soi les points que l'on juge importants ou délicats ; les moments où les élèves travailleront seuls ou en groupes ; ceux, les plus importants, où le professeur se gardera d'intervenir sur les mathématiques en cours d'élaboration autonome par les élèves en groupes, etc. Il semble donc nécessaire de se constituer, avant enseignement et au cours d'une lecture approfondie de cette proposition,* ***une fiche de direction de l'étude*** *qui jouera le rôle de guide pour l'enseignement effectif en classe.*

---

[1] Dans cette proposition, la définition du terme *grandeur* n'est pas interrogée ; sa rigoureuse définition mathématique a été donnée en 1968 par H. Whitney dans *The American Mathematical Monthly* (vol. 75, nº 3, pp. 227-256). Pour des articles en français, parmi plusieurs références disponibles, on pourra consulter la brochure *Mots*, tome VI éditée en 1982 par l'APMEP et intitulée *Grandeur, mesure* ; les articles *Les grandeurs au Collège*, partie I (2001) et partie II (2002) de Y. Chevallard & M. Bosch publiés dans les revues Petit *x* n° 55 et n° 59 ; le document d'accompagnement *Grandeurs et mesures* édité par la DGESCO en 2007.

1re séquence : Nouvelles premières rencontres avec les notions de grandeur et d'ordre sur les grandeurs

1 - Cadrage mathématique et didactique

De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». Le professeur peut se dispenser de leur lecture s'il souhaite seulement disposer d'un cours à partir de cette proposition. ***Les compléments à la 1re séquence portent sur les notions de grandeur et de grandeurs commensurables.***

La première séance a pour objet de faire travailler par les élèves la notion de grandeur attachée à des objets ; dans ce cas des bandes de papier (ensemble B) et des livres (ensemble L). On fait rencontrer des propriétés variables d'éléments de B (la couleur, la longueur, l'aire, la rigidité, la largeur) et de L (la forme, la taille, l'épaisseur, le poids, l'aire de la couverture, la discipline scolaire, la couleur de la couverture).

La notion de grandeur est considérée comme relativement familière chez les élèves, sans même parfois avoir été nommée en tant que telle, car ils ont eu l'occasion de s'engager dans des pratiques sociales qui utilisent des grandeurs : la monnaie, le temps, la taille ou le poids... Mais le plus souvent, le terme « grandeur » ne paraît guère être connu qu'associé à « grand », comme dans la phrase : « il est grand pour son âge ». A l'école primaire, les élèves ont peut-être rencontré la notion puisque elle figure dans les programmes des cycles 2 et 3. Si ce n'est pas le cas, on s'appuiera sur leur rapport culturel aux grandeurs construit à l'extérieur du système scolaire.

Dans un premier temps, on définit une grandeur comme étant « ***un des caractères d'un objet qui est susceptible de variation chez cet objet ou d'un objet à l'autre*** » ; ce qui est plus parlant que « la vieille » définition : « une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution ». On considère donc que les élèves peuvent appréhender ces caractères sur les objets face auxquels ils sont tout d'abord mis en présence : couleur, longueur, rigidité, largeur, forme, taille, épaisseur, poids de livres et aire des couvertures, discipline scolaire, etc.

Puis, dans un second temps, on ne considère que celles des grandeurs sur lesquelles on peut définir une relation d'ordre. On élimine ainsi les grandeurs comme la couleur (sauf dans le cas où pour la même couleur, on évaluerait des échantillons plus ou moins foncés), la forme, la discipline scolaire, par exemple.

Enfin, en indiquant ensuite que l'on ne va s'intéresser qu'à la longueur, à l'aire et au poids, on place les élèves dans le seul cas des grandeurs continues mesurables[2], en évitant le cas des grandeurs seulement repérables, comme la température... Le travail sur l'ordre, obtenu à partir

---

[2] C'est-à-dire vérifiant l'axiome d'additivité d'une mesure. A. Warusfel donne, dans l'Encyclopedia Universalis en ligne, la définition d'une mesure après avoir défini ce qu'est, en mathématiques, une tribu T. « Une fois définie une tribu, une mesure est une application μ de T dans l'ensemble des réels positifs ou nuls telle que la somme des mesures d'une suite (A_n) d'éléments de T deux à deux disjoints (somme des termes d'une série convergente), soit la mesure de leur réunion ».
La grandeur « température » n'obéit pas à la définition d'une mesure : la somme des mesures des températures d'objets deux à deux disjoints n'est pas égale à la mesure de la température de leur réunion. On peut cependant établir une relation d'ordre sur l'ensemble des températures, on dit alors que la température est une grandeur ***repérable***, mais pas une grandeur mesurable.

du choix de la grandeur, permet de classer les objets : du plus court au plus long, du plus massif au moins massif, etc. Les élèves constatent que pour les mêmes objets, mais selon la grandeur utilisée, l'ordre (total dans ces cas) grâce auquel les objets sont classés, diffère. Est ainsi prouvé que l'ordre ne dépend pas de l'objet en tant que tel, mais de la grandeur attachée à l'objet. Ce constat permettra de comprendre qu'il n'y a pas de sens à parler ultérieurement de fractions d'objet (pizza, segment, etc.), mais seulement de fraction de grandeur.

2 - Déroulement prévu pour la séance

Les élèves sont mis en groupe de quatre ou cinq et leur sont distribuées des bandes de papier (ensemble B) de longueurs différentes, ainsi que des livres (ensemble L) de poids différents. Par exemple cinq ou six bandes de papier cartonné, éventuellement de couleurs différentes mais de même largeur et de longueurs différentes, deux bandes ayant cependant la même longueur ; de même quatre livres (pas plus de quatre pour des raisons exposées plus loin) de tailles et de poids différents sans que deux d'entre eux aient le même poids (*cf.* figure 1). Les bandes de papier sont dépourvues de marques évoquant la possibilité d'une mesure à partir d'une unité.

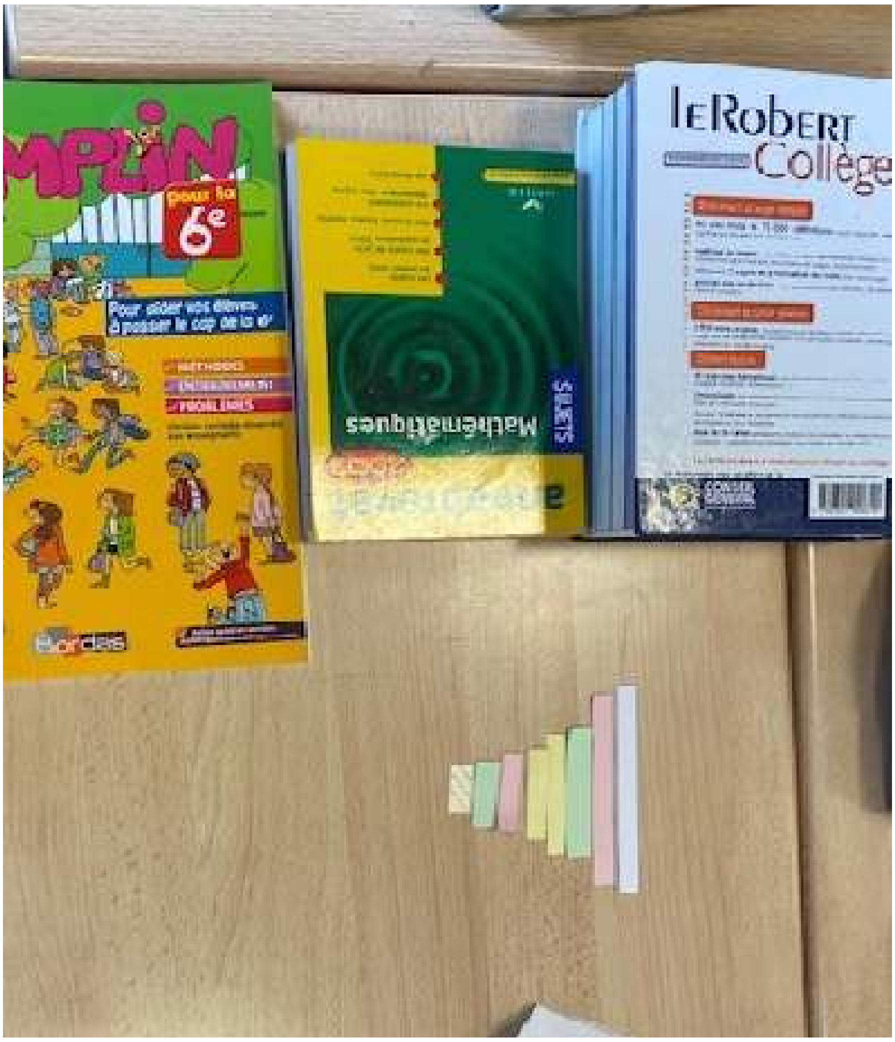


Figure 1. – Livres et bandes de papier mis à disposition des élèves dans une classe

2.1 - Nouvelle première rencontre avec la notion de grandeur

Question génératrice : Voici des objets que vous connaissez bien : des bandes de papier et des livres. Quelles sont les propriétés, les points communs et les différences que partagent ces objets entre eux : d'une part les livres entre eux, d'autre part les feuilles de papier entre elles ?

On s'attend à ce que les élèves proposent :

- pour les bandes : la couleur, la longueur, la surface, la rigidité, qu'elles ont la même largeur,
- pour les livres : la forme ou taille (grand / petit), l'épaisseur, le poids, la surface ou la couleur de la couverture, la discipline scolaire à laquelle ils se rapportent.

La figure 2 donne un aperçu des réponses possibles obtenues dans deux classes de 6e :

Bandes de papier	**Livres**
Longueur	Nombre de pages
Aire	Aire de la couverture
Largeur	Poids
Couleur	Epaisseur
Périmètre	Prix
	Consistance
	Périmètre de couverture

Bandes de papier	**Livres**
Longueur	Epaisseur
Formes géométriques	Formes géométriques
Couleur	Poids
Aire	Aire
	Consistance
Matière	Matière
	Nombre d'arêtes
Largeur	Largeur

Figure 2. – Réponses obtenues dans deux classes de 6e

Une autre possibilité :

En fonction des réactions et difficultés des élèves, notamment afin de ne pas consacrer trop de temps à la verbalisation et à l'écriture, on peut décider que cette séance sera uniquement orale et réduire la question génératrice à la formulation suivante : « Quelles sont les différences entre tous ces objets ? » Une telle séance a été menée dans une classe en s'appuyant sur la présentation de quatre objets (livre épais de vulgarisation des mathématiques, roman de poche, manuel de mathématiques et livret d'exercices accompagnant le manuel).

A l'énoncé des points de différence par les élèves, le professeur les a écrits au tableau, en prenant soin de placer à gauche les grandeurs mesurables, et à droite toutes les autres. Il en résulte un tableau fortement déséquilibré avec :

- *à gauche, les mots hauteur, épaisseur, longueur, largeur, aire, poids, masse, nombre de mots, nombre de pages, nombre de caractères, volume ;*
- *à droite, les noms d'auteurs, de maison d'édition, les couleurs, les thèmes, l'année d'édition…*

Quelle que soit l'option choisie, ce travail se conclut par :

2. 1. 1 - Institutionnalisation locale

Les différents caractères, communs ou pas à ces objets (longueur, aire, couleur, poids, prix, etc.), s'appellent ***des grandeurs.*** Elles varient d'un objet à l'autre ; que ces objets soient de même nature, par exemple l'épaisseur pour des livres, ou de nature différente, par exemple le poids des livres et des bandes de papier.

Et il se prolonge par un travail d'identification de grandeurs sur des exemples évoqués, comme ci-dessous.

2.1.2 – Exercices – Travail de la technique – Routinisation

Exercice 1 – Dans la vie de tous les jours, en dehors de l'école, quelles sont les grandeurs (mathématiques ou non) que vous rencontrez le plus souvent ?

Exercice 2 – Parmi les grandeurs mathématiques indiquées en réponse à l'exercice 1, y en a-t-il qui peuvent s'additionner entre elles ?

Exercice 3 – Quelles sont les grandeurs communes aux deux objets figurants sur les deux images suivantes :

Exercice 4 – En mathématiques :
1) Quel est l'objet géométrique qui n'a aucune longueur, aucune surface, aucun volume et aucune masse ?
2) Citez deux objets géométriques qui ont seulement une longueur.
3) Citez deux objets géométriques qui ont une longueur et une aire.
4) Est-il possible qu'un objet géométrique possède une aire mais pas de longueur ?

Exercice 5 - *Enoncer des grandeurs mathématiques communes :*
a) à l'eau et à l'huile,
b) à un train en mouvement, un escargot en mouvement et une voiture qui roule.

2. 2 - Nouvelle première rencontre avec la relation d'ordre attachée à des grandeurs continues de même espèce et élaboration d'une technique de comparaison

Dans ce cas encore, les élèves ont antérieurement établi un rapport à l'ordre sur certaines grandeurs : « cet enfant est plus grand que cet autre », « cet objet est moins cher dans ce magasin que dans l'autre », etc.

Question cruciale : On va s'intéresser à deux grandeurs seulement : la longueur pour les bandes de papier et le poids pour les livres. Peut-on, sans instrument, ordonner les longueurs des bandes de papier, de la plus petite à la plus grande, et ordonner les poids des livres du plus léger au plus lourd ?

Remarque : En ce qui concerne les bandes de papier de même largeur que nous utilisons dans cette proposition – utiliser des bandes de papier d'une certaine largeur est inévitable si l'on veut éviter qu'elles se déchirent –, l'expérience montre que les élèves du cycle 3 ne font pas de confusion entre longueur et aire (mathématiquement, les aires sont dans le même rapport que les longueurs si les largeurs sont égales). On pourra le vérifier par soi-même en classe ou encore, si on craint par avance ce type de confusion, fournir aux élèves des bandes de papier de largeurs différentes.

On s'attend à ce que les élèves demandent une règle pour mesurer la longueur des bandes de papier, autrement dit qu'ils tentent tout de suite une mesure ou qu'ils disent qu'il est impossible de peser les livres sans une balance ; le professeur refuse et rappelle la clause « sans instrument ».
Au bout de quelques temps, certains ont l'idée de disposer les bandes les unes sous ou sur les autres, en alignant l'une de leurs extrémités respectives ; par exemple, celles de gauche (comme pour le sens de l'écriture). Cette superposition est facilitée par le fait que les bandes de papier ont même largeur, ce qui permet de se concentrer sur la seule grandeur à comparer : la longueur.

Pour les livres, sans balance, il suffit de les soupeser ; ce qui risque de donner matière à de nombreux débats entre élèves puisqu'on ne peut que les comparer deux par deux, pour ensuite parvenir au classement final de l'ensemble des livres.

On peut alors désigner par les lettres de l'alphabet et dans l'ordre croissant ou décroissant les longueurs des bandes de papier que l'on marque sur les bandes elles-mêmes : « longueur a », « longueur b », etc.
Ce qui permet d'écrire : « longueur a » < « longueur b » ≤ « longueur c » < … si on a choisi des bandes B et C de même longueur (le symbole ≤ était auparavant enseigné en primaire, ce qui n'est peut-être plus le cas aujourd'hui car absent du programme. Il faudra donc vérifier s'il est ou non connu des élèves ; sinon, ce sera une occasion de l'enseigner). Le choix d'utiliser le symbole ≤ permet de conserver l'idée d'une suite ordonnée des longueurs dans le cas où deux d'entre elles sont considérées égales, après que les élèves les ont superposées. C'est au professeur de choisir ou non de fournir deux bandes de longueurs égales.

De même on peut ordonner les livres selon leurs poids, par exemple : « poids anglais » < « poids français » < « poids mathématiques » < …

2.2.1 - Institutionnalisation locale

Lorsqu'on choisit une ***grandeur*** pour des objets, la ***longueur*** pour les bandes de papier et le ***poids*** pour les livres, il est possible de les comparer en les rangeant dans l'ordre croissant par exemple : de la plus courte à la plus grande longueur des bandes de papier, du plus léger au plus lourd des livres.

On a : « longueur *a* » < « longueur *b* » ≤ « longueur *c* » < …
et « poids anglais » < « poids français » < « poids mathématiques » < …

Nouvelle question cruciale : Si on avait choisi la grandeur « aire » de leur couverture pour les livres, aurait-on obtenu le même classement ?

2.2.2 – Exercices – Travail de la technique – Routinisation

2.3 - Nouvelle première rencontre avec le rangement par ordre croissant ou décroissant, et ébauche d'une technique

Dans le cas des bandes de papier, la réponse semble simple à donner puisqu'elles ont toutes la même largeur, si on a effectivement distribué des bandes de même largeur.
Dans le cas des livres, donner une réponse est plus difficile selon les types de livres que le professeur a choisis. Par exemple, si l'on compare une revue type *Science et Vie junior* ou un journal avec un dictionnaire, on trouvera sans doute que le poids de la revue ou du journal est inférieur à celui du dictionnaire, tandis que pour les aires l'ordre change.
Cette remarque pour insister sur le fait que l'on ne compare pas des objets, mais les mêmes espèces de grandeurs attachées à ces objets. Avertissement que met en exergue, dès sa première page, le document d'accompagnement *Grandeurs et mesures* édité par la DGESCO en 2007, lorsqu'il énonce à propos des opérations, mais cela est vrai dès que l'on souhaite utiliser une relation d'ordre :

> qu'il est impossible d'opérer directement sur les objets (comme pourraient le suggérer des expressions très couramment utilisées telles que « le cinquième d'une tarte »), et qu'on ne peut pas faire l'économie des grandeurs, qui sont des abstractions à partir des caractéristiques des objets de la vie courante.

2.3.1 - Institutionnalisation

Si on change la grandeur propre à un ensemble d'objets, il est possible que l'ordre change. Par exemple, pour les livres d'un ensemble, si on remplace la grandeur ***« poids »*** par la grandeur ***« aire »*** de leur couverture, on a vu que l'ordre changeait.

Ici il est nécessaire de faire noter l'ordre qui change en fonction des grandeurs pour les mêmes objets, par exemple les livres. On obtient de la sorte un exemple qui montre l'impact qu'entraîne le changement des grandeurs sur l'ordre, bien que les grandeurs portent sur les mêmes objets.

2.3.2 – Exercices – Travail de la technique - Routinisation

2e séquence : la mesure d'une longueur à partir de deux longueurs commensurables *L* et *l*

1 - Cadrage mathématique et didactique

De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». Le professeur peut se dispenser de leur lecture s'il souhaite seulement disposer d'un cours à partir de cette proposition. ***Les compléments à la 2e séquence explicitent les raisons des choix faits, les difficultés évitées, et celles intrinsèques aux mathématiques, notamment la dialectique souvent implicite entre système et modèle.***

Dans cette séance, on ne s'intéresse plus qu'à la grandeur « longueur » à partir de deux bandes de papier B_1 et B_2 aux longueurs commensurables L et l. Autrement dit tels qu'il existe une longueur (appelée partie aliquote u) et deux entiers n et m pour lesquels $L = nu$ et $l = mu$. On dira que L mesure n et que l mesure m si on choisit u comme longueur-unité.
Ayant travaillé sur l'ordre dans la séquence précédente, on demande de combien de fois la bande de plus grande longueur est grande relativement à celle de plus petite longueur. On fait alors travailler l'addition des grandeurs et la multiplication par un entier n à l'aide de l'addition itérée.

Comme l'addition répétée de la longueur l (par mise bout à bout des bandes de longueur l) ne permet pas d'obtenir la longueur L, on constate qu'il n'existe pas d'entier k tel que $L = kl$. Il apparaît alors nécessaire de choisir une longueur auxiliaire u, plus petite que l mais dont l est un multiple, en vérifiant si celle-ci permettra d'obtenir L par addition répétée de u.
Lors de cette séance, on fait implicitement travailler aussi :

- la soustraction lorsqu'on constate que $4l < L < 5l$
- la division par $n \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'on définit u par $l = 2u$ et donc $u = \frac{1}{2}l$.

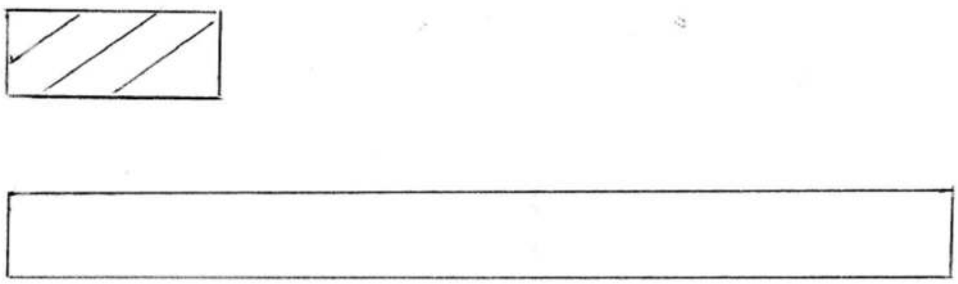
Puis, faisant varier la longueur-unité (soit l, soit L), on obtient les mesures rationnelles de l en prenant L pour longueur-unité, et de L en prenant l pour longueur-unité : respectivement $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$.

2. Déroulement prévu pour la séance

Les élèves sont de nouveau mis en groupe de quatre ou cinq. Le professeur fait rappeler le travail précédemment mené sur les bandes de papier, notamment les grandeurs de même espèce qui ont été utilisées (longueur et aire) et, le fait qu'ayant choisi une grandeur, on a pu les ranger de la plus courte à la plus longue, ou de celle de plus petite aire à celle de plus grande aire.
Il indique que parmi toutes les grandeurs propres aux objets « bandes de papier », on ***s'intéressera tout d'abord à leur longueur.***

Il distribue alors deux bandes de papier à chaque élève (celles qui sont dans le rapport $\frac{2}{9}$), en indiquant qu'elles viennent de l'ensemble étudié lors de la séance précédente. Il fait rappeler qu'elles ont la même largeur mais que la longueur de l'une est inférieure à celle de l'autre. La question génératrice suivante est évidemment à adapter en fonction de la couleur des bandes considérées.
Pour plus de facilité de lecture on a ci-dessous décidé de les distinguer en « bande blanche » et « bande hachurée ».

Question génératrice : La longueur de la bande blanche est plus grande que la longueur de la bande hachurée. De combien de fois est-elle plus grande ?



Le professeur indique que, par commodité, on appellera L la longueur de la plus grande et l la longueur de la plus petite.

2.1 - Première rencontre avec le type de tâches « mesurer une longueur » et ébauche d'une technique pour la mesure

Les élèves se servent de leurs connaissances antérieures. La question véhicule implicitement l'idée que l'on recherche un ***nombre entier*** de fois… Commencer de répondre à cette question engage vers une technique additive qui se traduit par une mise bout à bout de bandes hachurées le long de la bande blanche.

Comme il n'y en a qu'une, sans doute les élèves vont reporter la bande hachurée autant de fois que nécessaire en notant chaque fois des marques sur la bande blanche. Mais pour parvenir jusqu'à l'extrémité de la bande blanche, surgit un problème. Les longueurs ont en effet été choisies pour que cet espace mesure la moitié de la longueur l (on a pris $L = 4{,}5l$).

Que vont faire les élèves ?

Il est possible qu'ils disent qu'il manque un bout de bande hachurée, que certains disent qu'il y en a entre 4 et 5, qu'il en manque la moitié, voire que certains écrivent 4,5 puisque des nombres décimaux ont été rencontrés au CM, etc. Sans doute, après tâtonnements, vont-ils plier la bande hachurée en deux parties égales et constater qu'alors on peut ajouter la moitié de cette bande pour parvenir à l'extrémité de la bande blanche.
L'expérience concrète, en classe, permet de savoir exactement ce que répondent, à cette étape, les élèves.

Quoi qu'il en soit, ce qui importe est l'impossibilité matériellement constatée de reporter un nombre entier de fois la longueur *l* pour obtenir la longueur *L*. Si les élèves disent que $L = 4{,}5l$, cela renforce l'idée que ce nombre entier n'existe pas. Si les élèves utilisent 4,5 puisqu'ils ont quelques connaissances antérieures sur les décimaux, le professeur indique que l'on reprendra plus tard, et pour l'approfondir, l'étude des nombres comme le nombre 4,5.

Institutionnalisation locale :

On ne trouve pas de nombre entier par lequel multiplier la longueur *l* pour obtenir la longueur *L*.

Interventions fondamentales du professeur à partir des questions qu'il pose, sans souffler de réponses

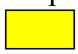
1. L'échec conduit vers une nouvelle question cruciale nécessitée pour la poursuite de la recherche. Pour amener cette nouvelle question, ***le professeur doit, auparavant, faire constater la raison de cet échec*** *: la longueur l est trop grande pour pouvoir, en la multipliant un nombre entier de fois, recouvrir exactement la bande de longueur L.*

2. Face à l'échec de la tentative précédente, le professeur propose un débat entre élèves. Lors de ce débat, une contradiction doit être résolue : si on choisit une longueur plus petite que l, alors comment faire pour répondre à la question qui portait sur l, et pas sur une autre longueur plus petite ? ***Dans le cas où aucune proposition n'émerge du débat entre élèves, et seulement dans ce cas,*** *le professeur intervient de nouveau : et si on disposait d'une longueur plus petite que l, est-ce qu'on parviendrait à déterminer combien de fois cette longueur dans L ?*

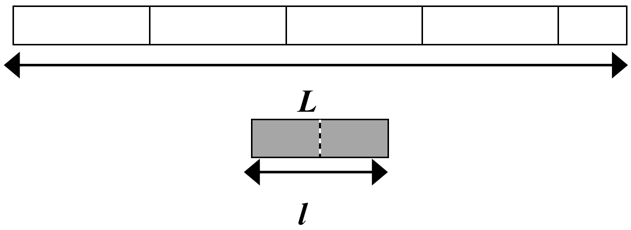
2.2 - Construction d'une technique pour mesurer une longueur

Le moment dans lequel on arrive dans ce PER est un, sans soute LE, ***moment crucial*** *du PER.* ***.*** *Si, à l'issue de cette séquence, le professeur juge qu'un nombre trop important des élèves n'ont pas acquis un rapport adéquat au principe de la mesure d'une grandeur à partir d'une grandeur-unité, alors il faudra qu'il y revienne avec d'autres longueurs ou d'autres grandeurs (l'aire par exemple).*

Question cruciale : sans utiliser d'instrument de mesure, peut-on trouver combien il faudrait de bandes de longueurs égales mais plus petites que la longueur l pour recouvrir complétement, et sans déborder, la grande bande ?

Il y a de grandes chances que les élèves disent que pour obtenir une longueur plus petite que *l* on peut utiliser « un morceau » de bande hachurée, comme celui-ci en jaune 

Ce « morceau » est facilement obtenu en prenant la moitié de la bande hachurée ; les longueurs doivent être choisies pour cela. Sa longueur est la partie aliquote commune à *l* et *L*.
On sait, par ailleurs, que tout diviseur de la partie aliquote convient, mais il est peu probable que les élèves divisent en quarts ou en sixièmes la longueur de la bande hachurée pour obtenir des sous-multiples de la partie aliquote…
Dès que les élèves se sont aperçus qu'il manque une longueur moitié de la longueur *l* pour parvenir à la longueur *L*, le professeur autorise à couper en deux parties égales (superposables) la bande hachurée ; cette dernière étant désormais représentée dans ce texte en gris.



Les élèves reportent la bande jaune, comme le montre la figure 3.

Figure 3. – Report d'une longueur-unité dans une classe de 6e

Les élèves constatent qu'ils peuvent reporter 9 fois la longueur de la bande jaune pour obtenir la longueur L.

Une question nouvelle est portée par le professeur : comment écrire avec des lettres le résultat auquel on vient de parvenir, comme on l'a déjà fait pour les lettres l et L ?

*Diverses propositions peuvent venir des élèves. Dans ce cas encore, c'est l'observation in situ, dans la classe, qui permet de savoir si des réponses sont proposées par des élèves. Mais comme les élèves ne disposent pour l'instant que des lettres l et L, c'est au professeur qu'il revient d'annoncer qu'on **va appeler u** la longueur de la bande jaune, parce qu'on l'appelle **longueur-unité**, et de demander alors comment écrire l et L en fonction, ou en utilisant u.*

Le professeur demande comment écrire L et l à l'aide de u.

On s'attend à ce que les élèves écrivent éventuellement :
$L = u + u + u + u + u + u + u + u + u,$
mais plus sûrement $L = 9u$ (éventuellement $9 \times u$, le professeur disant alors que pour simplifier l'écriture, et comme il n'y a pas de risque de confusion, on écrit $9u$ en mathématiques)[3]
et $l = u + u = 2u$ (idem dans la cas d'une écriture $2 \times u$).

Lors de ces moments, et dans le cas où les élèves ne proposent pas les écritures $9u$ et $2u$, expressions d'un rapport à ces écritures qui n'aurait pu être antérieurement construit, c'est au professeur à les ***enseigner***. Il ***indique*** l'écriture « standard », $9u$ et $2u$, adoptée en mathématiques et que les élèves ne peuvent spontanément inventer.

[3] Dans le langage courant, on dit « neuf stylos » et non pas « neuf fois un stylo », bien que les deux conviennent. On s'appuie donc sur cette pratique langagière pour dire « neuf u » et écrire « $9u$ », et non pas « neuf fois u » et « $9 \times u$ » ; confondre les deux ne pose pas de problème.

Il est possible que des élèves proposent d'autres pliages de la bande de longueur l afin d'obtenir un recouvrement de celle de longueur L. C'est ce qui a pu être observé ci-dessous :

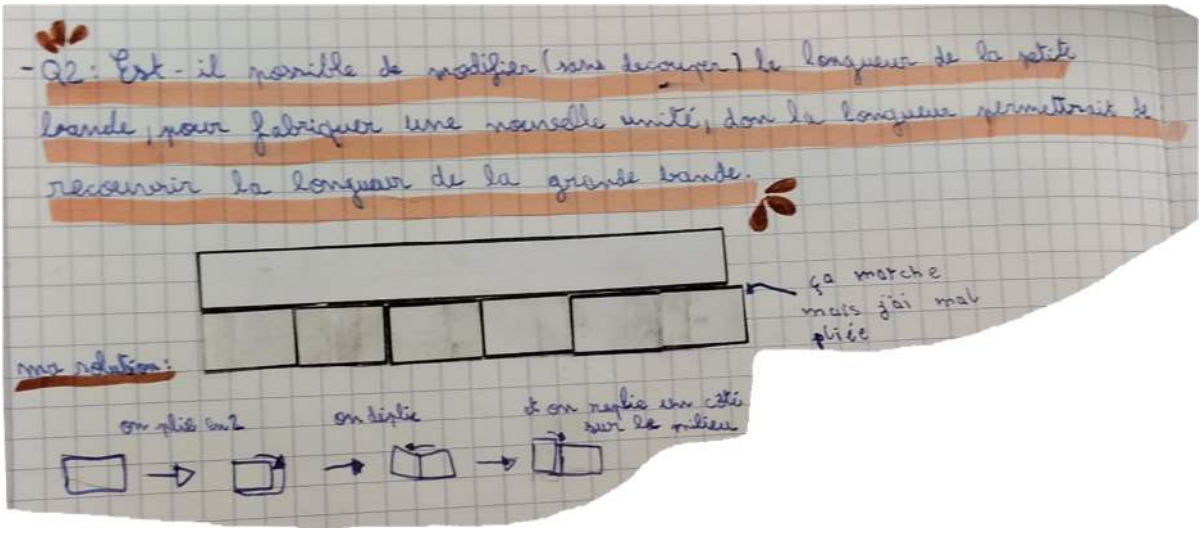


Figure 4. – Une élève trouve une autre unité de longueur et explique par quels pliages

C'est au professeur à tenir compte des résultats obtenus et validés par la classe afin de procéder à une institutionnalisation qui met en exergue l'essentiel de ce que l'on devra retenir. Dans le cas où la classe s'est engagée dans un travail qui abouti à $L = 9u$, on note :

2.2.1 - Institutionnalisation

En prenant pour ***longueur-unité***, notée u, la moitié de la longueur l, on obtient : $l = 2u$ et $L = 9u$.

$l = 2u$ signifie que 2 est le nombre de longueurs-unités u nécessaires pour obtenir la longueur l.
$L = 9u$ signifie que 9 est le nombre longueurs-unités u nécessaires pour obtenir la longueur L.

On dit que ***la longueur l mesure 2 et la longueur L mesure 9 si l'on prend u pour longueur-unité***.

2.2.2 - Exercices – Travail de la technique – Routinisation (à faire sans mesurer avec une règle graduée)

Exercice 1

Dans cet exercice, vous êtes libre d'inventer vous-mêmes une longueur L ainsi que les unités u et v à condition qu'elles correspondent à la description ci-dessous.

Dans une classe, les élèves doivent mesurer la même longueur L avec deux unités différentes, appelées u et v, où $u < v$.

a) Un élève dit avoir trouvé $L = 4u$ et $L = 7v$. Qu'en pensez-vous ?
b) Un autre élève, sans faire d'expérience, affirme qu'il faudra le même nombre de u que de v (par exemple $L = 4u$ et $L = 4v$) car la longueur L ne change pas. Partagez-vous son point de vue ?

Exercice 2

On désire construire une longueur L. Pour y arriver, on dispose de l'unité v suivante :

a) Construire L mesurant 6 avec l'unité v.
b) A partir de la construction précédente, déterminer une unité u de telle manière que L mesure 3 en choisissant u comme unité.
c) Construire la longueur $M = 2L$

Exercice 3

Ecrire les phrases expliquant la signification des égalités ou affirmations suivantes :

a) $S = 5a$
b) $L = 7v$
c) $L = 4u$ et $L = 3v$
d) Si $L = 5u$ alors $3L = 15u$

Nouvelle question cruciale : on vient d'écrire l à partir de u, comment écrire u à partir de l ?

Ici encore, il est fort probable que les élèves répètent que « u fait la moitié de l » puisque cela fait partie de l'institutionnalisation qui précède. Mais comment l'écrire ? La fraction « partage », étudiée en primaire, devrait avoir fait associer l'expression « un demi » à l'écriture fractionnaire « $\frac{1}{2}$ ». Cela devrait permettre d'obtenir une égalité de la forme « $u = \frac{1}{2}$ de l » qu'il reste à transformer en $u = \frac{1}{2}l$. C'est un passage délicat à justifier auprès des élèves car, au cours du processus de transition vers une écriture d'où la préposition « de » est absente, on joue implicitement sur l'équivalence $\frac{1}{2}l = (\frac{1 \times l}{2}) = \frac{l}{2} = l \div 2$. Dans ce cas encore, c'est ***l'observation en classe*** *qui tranche car il est a priori difficile de connaître toutes les dimensions du rapport d'élèves de 6e venus de diverses écoles primaires à « la notion de fraction ».*

Pour construire u à partir de l, il a fallu partager la bande de papier de longueur l en deux parties égales et ne conserver qu'une de ces deux parties. On dit qu'on a divisé l en deux parties égales et qu'on n'en a pris qu'une.

Institutionnalisation

Comme la longueur u est la moitié de la longueur l, on écrit que $u = \frac{1}{2}l$.

$\frac{1}{2}$ est ***la fraction*** qui se dit « un demi ».

Modèle de phrase n°1 :

Ecrire que $u = \frac{1}{2}l$ signifie que pour obtenir la longueur u à partir de la longueur l, il faut diviser la bande de longueur l en deux parties égales et ne prendre qu'une de ces deux parties.

Modèle de phrase n°2 :

L'écriture $u = \frac{1}{2}\,l$ signifie que $\frac{1}{2}$ est le nombre de longueur l prise pour longueur-unité, nécessaire pour obtenir la longueur u.

Exercices

Exercice 1

Comment lit-on les fractions suivantes : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{1000}$?

Exercice 2

Traduire, sous forme de phrase modèle n°1, les égalités suivantes :

a) $u = \frac{2}{7}L$
b) $v = \frac{7}{2}M$
c) $w = \frac{7}{7}N$
d) $\frac{5}{8}J = g$
e) $\frac{5}{8}J = \frac{1}{4}g$

En vous aidant du quadrillage fourni, essayer de représenter la formule a) en indiquant bien, sur votre dessin, ce qui représente u, ce qui représente L, et les nombres 2 et 7.

Exercice 3

Traduire, sous forme de phrase modèle n°2, les égalités suivantes :

a) $u = \frac{2}{7}\mathrm{L}$
b) $v = \frac{7}{2}\mathrm{M}$
c) $w = \frac{7}{7}\mathrm{N}$
d) $\frac{5}{8}J = g$
e) $\frac{5}{8}J = \frac{1}{4}h$

En vous aidant du quadrillage fourni, essayer de représenter la formule b) en indiquant bien, sur votre dessin, ce qui représente v, ce qui représente M, et les nombres 2 et 7.

Exercices divers

Les exercices des questions b, c et d restent à étoffer. Ils sont donnés à titre indicatif pour des professeurs qui voudront les développer.

Ecrire, sous la forme d'une égalité, les déclarations suivantes :

a) Dans une feuille au format A4, on peut placer exactement deux feuilles au format A5. Quelles égalités peut-on écrire entre l'aire A d'une feuille au format A4 et la l'aire a d'une feuille au format A5 ?
b) A partir de la phrase de l'institutionnalisation, construire la fraction et vice et versa.
c) Travail des sens de l'équivalence l = 2u ⇔ $u = \frac{1}{2}\,l$.
d) $u = \frac{1}{2}l$ se lit u est égal à un demi de l et se construit ainsi : on divise la longueur l en deux longueurs égales, et on prend une de ces nouvelles longueurs.

2. 2. 3. Nouvelle première rencontre avec les fractions et travail de la technique

Question cruciale :
On a obtenu les mesures de l et de L en prenant u comme longueur-unité. Pourrait-on se passer de u ? Autrement dit :

- ***Pourrait-on obtenir la mesure de L en prenant l comme longueur-unité, donc écrire L à l'aide de l et d'une fraction ?***
- ***Pourrait-on obtenir la mesure de l en prenant L comme longueur-unité, donc écrire l à l'aide de L et d'une fraction ?***

Le professeur devra peut-être expliciter davantage ces questions. En tout état de cause, on rencontre de nouveau en ce point la nécessité de substituer u par $\frac{1}{2}l$ ou par $\frac{1}{9}L$. Pour faciliter cette substitution, il apparaît nécessaire de manipuler les bandes de papier de longueur u. Cela dans le but de parvenir à convertir cette manipulation en une écriture mathématique ; par exemple, comme indiqué précédemment, en faisant noter sur chacune des bandes de longueur-unité les écritures différentes de cette même longueur : $\frac{1}{2}l$ et $\frac{1}{9}L$.

On s'attend cependant à ce que les élèves parviennent à écrire, en s'aidant pour cela des bandes de papier associées aux mesures à l'aide des bandes de longueur u :

$l = 2u = \frac{1}{9}L + \frac{1}{9}L = 2 \times \frac{1}{9}L = \frac{2}{9}L$ et

$L = 9u = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l = 9 \times \frac{1}{2}l = \frac{9}{2}l.$

Faisant cela, il apparaît en ce point que, dans les écritures qui précèdent, on s'appuie sur une pseudo-distributivité postulée (*pseudo* car agissant sur des objets mathématiques de nature différente : des scalaires, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{9}$, et des grandeurs, l et L). En fait, on s'appuie auprès des élèves sur le rapport qu'ils ont antérieurement établi à la définition provisoire de la multiplication étudiée en primaire : une addition réitérée.

Important !

Le passage de $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ à $l = \frac{2}{9}L$ est admis. Au besoin, on peut le justifier par la verbalisation : un *neuvième de L* plus un *neuvième de L* donne deux *neuvièmes de L*. Cependant l'écriture $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ signifie que l mesure 2 si on considère que la longueur unité est le neuvième de L. Mais l'écriture $l = \frac{2}{9}L$ signifie que l mesure $\frac{2}{9}$ si on considère que la longueur unité est L.

Il se trouve que l'on vient de rencontrer, à cette étape du PER, en mesurant des longueurs et en inter-changeant les longueurs-unités pour l et L, des mesures obtenues sous forme de fractions dont les termes sont inversés ; d'où l'expression de « fractions inverses ».

On a en effet obtenu : $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l.$

Il serait étonnant qu'au moins un élève d'une classe ne remarque cela. Au professeur de reprendre cette remarque pour la porter devant la classe si c'est le cas. Si cela n'est pas remarqué par les élèves, il a le choix de l'indiquer ou non : l'usage de l'inverse d'un nombre n'apparaît en effet qu'en 4e.

Institutionnalisation :

L'écriture $l = \frac{2}{9}L$ signifie que ***l mesure*** $\frac{2}{9}$ ***si on prend L comme longueur-unité***.

L'écriture $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ signifie que ***l mesure 2 si on prend*** $\frac{1}{9}$***L comme longueur-unité***

Nous avons pu constater par l'expérience que les écritures $l = \frac{2}{9}L$ et $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ signifient toutes deux que l'on divise la longueur L en 9 longueurs-unités égales et qu'on en prend 2.

Dans les écritures $l = \frac{2}{9}L$ et $l = 2 \times \frac{1}{9}L$:

- 9 est toujours le nombre de parts égales permettant le découpage complet de la longueur L et s'appelle ***le dénominateur ;*** il ***dénomme*** l'unité créée par le partage d'une grandeur en parts égales
- 2 est le nombre de parts égales permettant de mesurer la longueur l et s'appelle ***le numérateur ;*** il indique le ***nombre*** d'unités nécessaires à la mesure de la longueur l, de même espèce que celle du dénominateur

Numérateur et dénominateur sont les ***termes de la fraction*** $\frac{2}{9}$;

Il est possible de faire noter ce qui suit concernant les fractions inverses, selon que cela aura ou non été travaillé avec les élèves :

Les fractions $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$ sont dites ***inverses l'une de l'autre.***

Les fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont égaux ***sont égales à 1***. Par exemple : $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{9}{9} = 1$, etc.

Exercices

Exercice 1

Dans les expressions suivantes, quelles sont les unités qui sont comptées ?

a) vingt-trois stylos ;
b) soixante têtes et cent-vingt pieds ;
c) trois centaines de soldats ;
d) trente douzaines d'huîtres ;
e) quinze demies-douzaines d'œufs ;
f) une demi-heure ;
g) trois quarts d'heure ;
h) trois septièmes de vingt et un centimètres ;
i) deux neuvièmes de l'aire de la classe ;
j) sept demies de quarante six personnes.

Exercice 2

Ecrire, pour chacune des égalités suivantes, la phrase qui permet de l'interpréter.

1. $L = \frac{7}{4}l$;
2. $EF = \frac{6}{7}FG$ où EF et FG sont des longueurs de segments ;
3. $a = \frac{2}{9}A$ où a et A sont des mesures d'aires

Exercice 3

Ecrire, sous forme mathématique, l'égalité qui est interprétée par chacune des phrases suivantes :

a) Pour construire l'aire d d'une surface, il faut prendre l'aire D d'une autre surface, la diviser en 8 parts égales et en prendre 3.

b) Pour fabriquer l'unité de longueur u, il faut prendre la longueur AB du segment [AB], la diviser en 4 parts égales et en prendre 1.

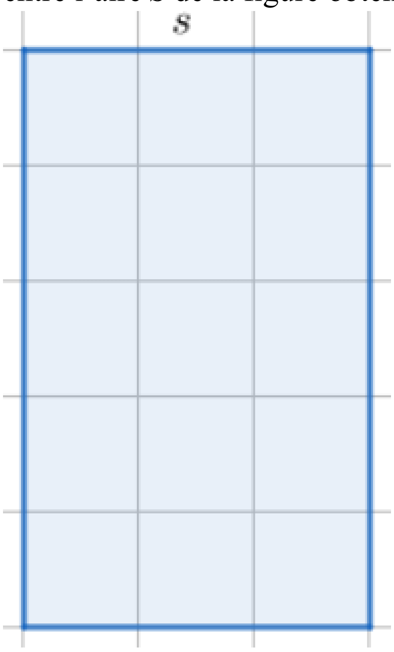
c) Si je prends une grandeur G, que je la divise en 7 parts égales et que j'en prends 5, j'obtiendrai la grandeur g.

Exercice 4

Effectuer, sur cette feuille, les constructions suivantes en utilisant les instruments de géométrie (règle, équerre, compas) selon les besoins.

a) Construire un segment [EF] tel que $EF = \frac{3}{7}AB$ où [AB] est le segment ci-dessous :

b) Construire une figure obtenue à partir de l'aire s du rectangle ci-dessous, après l'avoir découpé en 5 parts égales puis en prenant 7 parts. Quelle égalité écrire entre l'aire S de la figure obtenue et l'aire s du rectangle ci-dessous ?



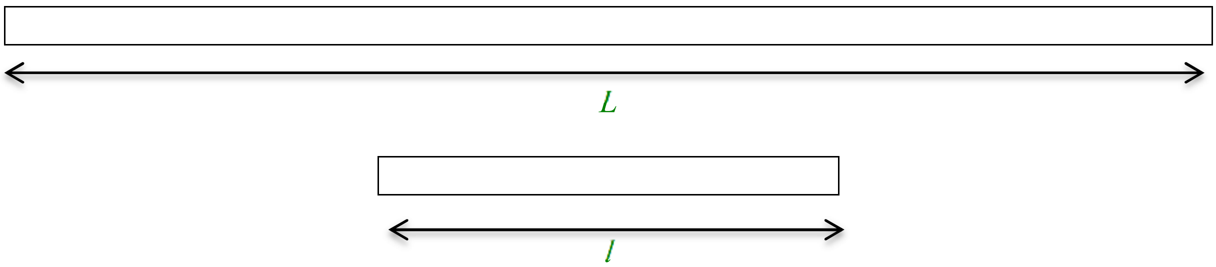
Exercice 5

1) On sait que $u = \frac{2}{3}L$ et que $l = 5u$. Prouver, par le calcul, que $l = \frac{10}{3}L$. Interpréter ce résultat.
2) Montrer que $L = 6 \times \frac{5}{4}l$ est équivalent à $L = \frac{30}{4}l$. Illustrer ce résultat par un schéma le plus détaillé possible.
3) Effectuer les calculs suivants :
   a. $L = \frac{2}{3}l + \frac{2}{3}l + \frac{2}{3}l + \frac{2}{3}l$
   b. $S = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a$

2. 2. 4. Travail de la portée de la technique qui a émergé

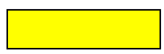
Institutionnalisation locale faite oralement par le professeur
Le professeur indique que l'on vient de trouver une technique qui a permis de résoudre le problème précédent et de rencontrer des fractions de grandeur. Elle passe par la nécessité de déterminer une longueur-unité *u* ; à partir de *u* on peut mesurer des longueurs. On va vérifier que cette technique convient pour d'autres longueurs de bandes de papier, puis écrire les fractions de grandeur qui en découlent.

Par exemple sont distribuées de bandes de papier de longueurs *L* et *l*, différentes des longueurs des bandes précédentes :



Il s'agit, pour les élèves, de s'aider de la technique qui a été précédemment élaborée. Ils commencent par constater l'impossibilité de reporter un nombre entier de fois la bande de longueur l pour recouvrir exactement celle de longueur L.

Face au problème qui se pose de nouveau, les élèves doivent revenir à la solution qu'ils ont trouvée auparavant. Elle consiste à plier la bande de longueur l afin d'obtenir une bande longueur-unité u plus petite qui permettra, en la reportant un certain nombre de fois, de recouvrir exactement la bande de longueur L.

Auparavant, il suffisait de plier la bande de longueur l en deux parties égales. La tentative échoue cette fois. Les élèves tentent d'autres pliages : en quatre, en trois. Trois semble être le pliage recherché. On obtient ainsi une bande de longueur-unité u : 

On constate qu'avec cette longueur-unité u la longueur L est recouverte exactement par 8 bandes de longueur-unité.

Arrivés en ce point, c'est désormais aux élèves seuls, ***sans l'intervention du professeur****, de continuer en écrivant les égalités mathématiques qui découlent des résultats de cette expérimentation.*
On attend ainsi d'eux qu'il écrivent l = 3u (ou 3 × u) et L = 8u (ou 8 × u)

Si le souvenir d'en déduire des écritures fractionnaires s'est dissipé, ***mais seulement dans ce cas,*** *le professeur peut le rappeler : « quelles fractions de longueur peut-on déduire des égalités obtenues avec la longueur-unité u ? »*

On souhaite que les élèves écrivent, à partir de $l = 3u$, $u = \frac{1}{3}l$ et, comme $L = 8u$, alors : $L = \frac{8}{3}l$. Puis, à partir de $L = 8u$, $u = \frac{1}{8}L$. Comme $l = 3u$, alors $l = \frac{3}{8}L$.

Remarque : retour possible de l'intervention du professeur

Il est possible que les élèves parviennent seuls à déduire de $l = 3u$ que $u = \frac{1}{3}l$, et de $L = 8u$ que $u = \frac{1}{8}L$. Mais parvenir à déduire $L = \frac{8}{3}l$ à partir de $u = \frac{1}{3}l$ et $L = 8u$ (respectivement $l = \frac{3}{8}L$ à partir de $u = \frac{1}{8}L$ et de $l = 3u$), nécessite de substituer u dans $L = 8u$ (respectivement dans $l = 3u$). A ce niveau du cursus, c'est peut-être la première fois que les élèves rencontrent une telle substitution ; ce n'est pas en effet une simple transitivité. Il est possible que des élèves, s'aidant de ce qui a été institutionnalisé en 2. 2. 3. parviennent cependant aux écritures fractionnaires recherchées. Ce sera un point d'appui, ces élèves le communiquant et le justifiant aux autres. Sinon, c'est sans doute ***au professeur à aider****, par exemple à partir d'une disposition du type $L = 8u$*

$$L = 8 \times \frac{1}{3}l = \frac{8}{3}l.$$

$$u = \frac{1}{3}l$$

Exercices possibles :

Après l'institutionnalisation, ***il faut prévoir davantage d'exercices*** *pour travailler les différentes techniques rencontrées :*

- *Trouver les unités*
- *Ecritures mathématiques équivalentes $\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l = 2 \times \frac{1}{2}l = \frac{2}{2}l$*
- *Comparaisons de fractions de grandeurs ayant des numérateurs égaux ou des dénominateurs égaux*
- *Constructions diverses en rapports avec une phrase d'interprétation donnée, et inversement.*

Il semble fondamental de faire jouer les élèves sur au moins trois cadres équivalents :

- *Ecritures d'une grandeur comme fraction d'une autre*
- *Phrase d'interprétation*
- *Constructions, dessins, schémas*

et leur faire retrouver deux cadres à partir de la donnée d'un autre. Lors de premières constructions avec les élèves, ceux-ci ne s'autorisent pas facilement à « inventer » une grandeur pour construire l'autre. En les amenant à le faire, on peut/pourra faire remarquer que pour une fraction donnée, l'échelle du dessin. Seule la création de la partie aliquote est importante.

Exercices

Exercice 1 - Dans chacun des cas suivants, cocher **la phrase qui correspond le mieux** à l'égalité donnée (les lettres en majuscules et minuscules présentent dans les égalités désignent toujours des longueurs).

a) $\boldsymbol{L = 8 \times \frac{1}{7} m}$

☐ La longueur L mesure huit septièmes si on prend la longueur m comme unité.
☐ La longueur L mesure huit si on prend le septième de la longueur m comme unité.
☐ La longueur L mesure sept huitièmes si on prend la longueur m comme unité.

b) $\boldsymbol{P = \frac{9}{4} k}$

☐ La longueur P mesure neuf si on prend la longueur k comme unité.
☐ La longueur P mesure neuf si on prend le quart de la longueur k comme unité.
☐ La longueur P mesure neuf quarts si on prend la longueur k comme unité.

c) $\boldsymbol{M = 9u}$

☐ La longueur M mesure neuf si on prend la longueur u comme unité.
☐ La longueur u mesure neuf.
☐ La longueur M divisée en neuf parts égales donne la longueur u.

Exercice 2 – Compléter les pointillés afin que les deux égalités soient équivalentes, puis écrire la phrase décrivant le mieux l'égalité complétée en suivant le modèle habituel (« La longueur … mesure … si …. »).

a) Si $\boldsymbol{L = 12 \times \frac{1}{5} m}$ alors $\boldsymbol{L = \ldots\ldots.\ M}$

b) Si $\boldsymbol{M = 5u}$ alors $\boldsymbol{u = \ldots\ldots.M}$

c) Si $\boldsymbol{P = \frac{4}{9} n}$ alors $\boldsymbol{P = \ldots \times \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} n}$

Exercice 3 – Répondre à la question posée directement sur la feuille **en justifiant votre réponse**.

a) La longueur L a été mesurée avec deux unités différentes u et v. On a trouvé que $L = 7u$ et que $L = 9v$. Laquelle de u et v est la longueur la plus grande ?
…………………………………………………………………………………………
………………………………………….
…………………………………………………………………………………………
………………………………………….
…………………………………………………………………………………………
………………………………………….

b) On sait qu'une longueur M mesure 12 si on prend une longueur unité u, et qu'elle mesure 9 si on prend v comme longueur unité. Laquelle de u et de v est la plus grande ?
…………………………………………………………………………………………
………………………………………….
…………………………………………………………………………………………
………………………………………….
…………………………………………………………………………………………
………………………………………….

c) Une même longueur L a été mesurée avec trois longueurs unités différentes u, v et w. On sait que :

- L mesure 6 si on choisit u comme unité,

- L mesure 8 si on choisit w comme unité,
- et L mesure entre 6 et 8 si on utilise v comme unité de longueur.

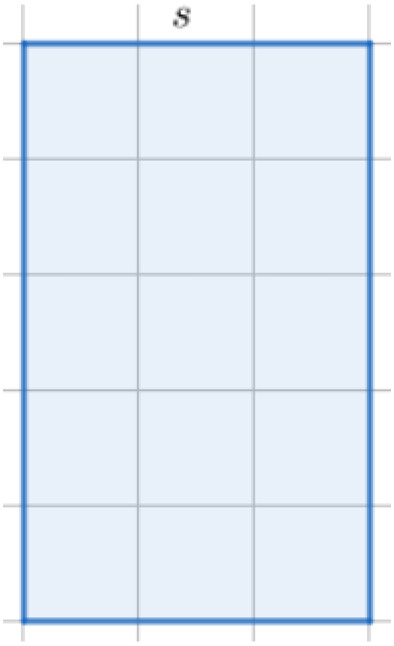
Laquelle des unités u, v et w est la plus grande ? la plus petite ?

…………………………………………………………………………………………
……………………………………….
…………………………………………………………………………………………
……………………………………….
…………………………………………………………………………………………
……………………………………….

Autres exercices possibles

4. *Dans les expressions suivantes, quelles sont les unités qui sont comptées ?*
   - k) *vingt-trois stylos ;*
   - l) *soixante têtes et cent-vingt pieds ;*
   - m) *trois centaines de soldats ;*
   - n) *trente douzaines d'huîtres ;*
   - o) *quinze demies-douzaines d'œufs ;*
   - p) *une demi-heure ;*
   - q) *trois quarts d'heure ;*
   - r) *trois septièmes de vingt et un centimètres ;*
   - s) *deux neuvièmes de l'aire de la classe ;*
   - t) *sept demies de quarante six personnes.*
5. *Ecrire, pour chacune des égalités suivantes, la phrase qui permet de l'interpréter.*
   $L = \frac{7}{4} l$ *; EF =* $\frac{6}{7}$*FG où EF et FG sont des longueurs de segments ; a =* $\frac{2}{9}$*A où a et A sont des mesures d'aires*
6. *Ecrire, sous forme mathématique, l'égalité qui est interprétée par chacune des phrases suivantes :*
   - d) *Pour construire l'aire d d'une surface, il faut prendre l'aire D d'une autre surface, la diviser en 8 parts égales et en prendre 3.*
   - e) *Pour fabriquer l'unité de longueur u, il faut prendre la longueur AB du segment [AB], la diviser en 4 parts égales et en prendre 1.*
   - f) *Si je prends une grandeur G, que je la divise en 7 parts égales et que j'en prends 5, j'obtiendrai la grandeur g.*
7. *Effectuer, sur cette feuille, les constructions suivantes en utilisant les instruments de géométrie (règle, équerre, compas) selon les besoins.*
   - c) *Construire un segment [EF] tel que EF =* $\frac{3}{7}$*AB où [AB] est le segment ci-dessous :*

   - d) *Construire une figure obtenue à partir de l'aire s du rectangle ci-dessous, après l'avoir découpé en 5 parts égales puis en prenant 7 parts. Quelle égalité écrire entre l'aire S de la figure obtenue et l'aire s du rectangle ci-dessous ?*



Une fiche d'exercices en plus grand nombre se trouve à la fin de la cinquième séquence qui signe aussi la fin de ce PER pour le niveau 6e.

3e séquence : un autre aspect du travail sur les grandeurs commensurables

De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». Le professeur peut se dispenser de leur lecture s'il souhaite seulement disposer d'un cours à partir de cette proposition. ***Les compléments à la 3e séquence portent sur l'intérêt de faire travailler une autre définition des grandeurs commensurables : celle pour laquelle deux grandeurs sont commensurables si et seulement si leur rapport est rationnel.***

3. 1. Cadrage mathématique et didactique

Dans cette séance, on travaille une autre manière d'aborder les grandeurs, bien qu'on continue à travailler avec des grandeurs de même espèce : les longueurs l et L. Elles ont été choisies pour que la mesure de l'une, lorsqu'on prend l'autre comme longueur-unité, soit un nombre rationnel. Autrement dit, on travaille pour cette séance la définition des longueurs ***commensurables***.

Rappelons que deux grandeurs G et G' de même espèce sont aussi dites commensurables s'il existe deux entiers naturels n et m tels que : $mG = nG'$. Il y a équivalence entre cette définition et celle donnée à l'aide d'une troisième grandeur appelée partie aliquote. A l'opposé, rappelons aussi l'épisode historique qui a conduit les Grecs à établir que la longueur d de la diagonale du carré n'est pas commensurable à la longueur a du côté. La démonstration actuelle par l'absurde – dans les *Eléments d'Euclide* ce résultat est prouvé par antiphérèse –, établit l'impossibilité de l'existence de deux entiers m et n pour lesquels on puisse avoir $md = na$; plus précisément pour qu'on ait $d^2 = 2a^2$. On dit alors que ces longueurs sont ***incommensurables***.

Avec les bandes de papier précédemment étudiées, aux longueurs l et L choisies commensurables, les élèves sont amenés, par une manipulation qui traduit physiquement la commensuration de ces longueurs, à l'égalité $9l = 2l$.

L'intérêt mathématique de ce travail réside dans la confrontation de cette dernière égalité avec les égalités précédemment trouvées : $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

L'intérêt didactique réside, quant à lui, dans la possibilité de faire débuter, dès cette séquence, le travail de la technique consistant ***à passer du produit au quotient***, et vice versa. Ainsi va-t-on faire travailler des techniques d'écriture résumées dans la suite d'équivalences suivantes : $l = \frac{2}{9}L \Leftrightarrow 9l = 2L \Leftrightarrow L = \frac{9}{2}l \Leftrightarrow \frac{L}{l} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{L} = \frac{2}{9}$.

D'expérience, on sait difficile la maîtrise de ces techniques par les élèves. Dans la présente proposition, et à partir des situations d'étude et de recherche basées sur la manipulation effective de bandes de papier de longueurs l et L, on tente ainsi de rendre moins absconse ***pour les élèves*** la définition du programme pour le quotient q de a par b : le nombre qui multiplié par b donne a, donc tel que $bq = a$. On sait aussi qu'à partir de la commensuration peut être travaillée l'étude des diviseurs communs à deux nombres. Un petit pas de plus à franchir et on aboutit au PGCD de deux nombres qui, au gré des modifications de programme, se trouve parfois à l'enseignement de la classe de 3e ; on n'abordera pas ici une telle étude, mais cette possibilité n'est pas à exclure, selon les contenus de programmes à venir. Enfin, le travail sur les grandeurs se poursuit. De manière implicite, commence à être rencontrée la proportionnalité des grandeurs, de même espèce dans ces premières séquences, ainsi que le coefficient de proportionnalité.

Le professeur distribue dans chaque groupe des bandes de papier de longueur l et d'autres de longueur L. Il lui faut prévoir une vingtaine de bandes de longueur l et quatre ou cinq bandes de longueur L.

Il explique que l'on va continuer à travailler sur les mêmes bandes de papier que lors de la séance précédente. Il peut faire rappeler par les élèves que pour trouver une relation entre les longueurs l et L, il avait fallu précédemment utiliser une longueur-unité plus petite appelée u avec $u = \frac{1}{2}l$ ou $u = \frac{1}{9}L$. Cette longueur-unité avait permis d'écrire deux relations entre l et L à l'aide de deux fractions inverses l'une de l'autre : $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

Rappelons que chacune d'entre elles peut être lue de deux manières : dans $l = \frac{2}{9}L$, l mesure deux neuvièmes si on considère L comme longueur unité, et si on écrit $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ alors l mesure 2 si on considère $\frac{1}{9}L$ comme longueur unité.

3. 2. Première rencontre, ébauche d'une technique et exploration du type de tâches dans le cadre de la commensuration

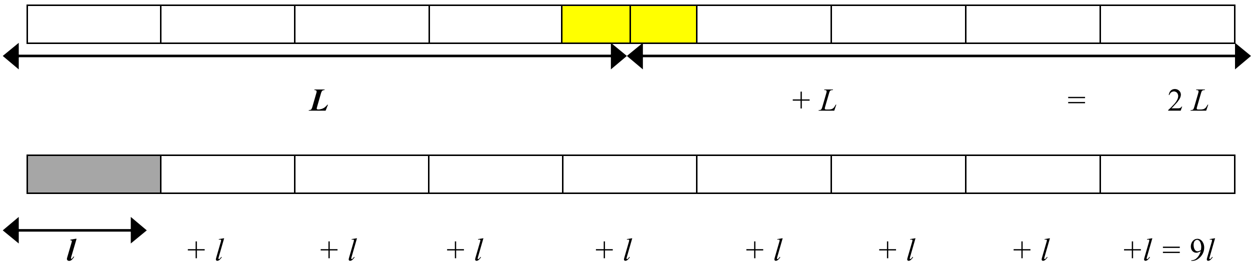
En ce point, on peut envisager de poser l'une ou l'autre des questions génératrices suivantes selon que les élèves pourront ou non se les approprier, ainsi que le temps que cela prendra :

Question génératrice 1** (la plus générale)* ***: Pour obtenir une relation entre l et L, il a fallu utiliser une longueur-unité. Pourrait-on trouver une relation entre l et L, sans utiliser une longueur-unité, notamment sans partager une feuille de longueur l en deux parties égales ?

ou

Question génératrice 2** (plus ciblée)* ***: Pour obtenir une relation entre l et L, il a fallu utiliser une longueur-unité : $u = \frac{1}{2}l$ ou $u = \frac{1}{9}L$. Pourrait-on trouver une relation entre l et L, sans utiliser une longueur-unité ? Par exemple peut-on construire deux bandes de papier de même longueur en utilisant pour l'une seulement des bandes de longueur l et pour l'autre seulement des bandes de longueur L ?

Quelle que soit la question génératrice choisie, tous les élèves du groupe travaillent ensemble avec les feuilles de longueurs l et L distribuées.
Lors de la 2^{e} séquence, la preuve expérimentale a été administrée de l'impossibilité d'obtenir une longueur L à partir d'un nombre entier de longueur l. Ce que le professeur peut rappeler dans le cas où quelques-uns voudraient s'engager dans cette voie. Il faudra sans doute photocopier un assez grand nombre de ces bandes de papier afin que les élèves puissent les manipuler sans devoir aller en chercher auprès d'autres camarades. Ainsi, on obtient :



Ce qui permet de noter : $2L = 9l$.

L'idée qui devrait pouvoir émerger chez les élèves pour résoudre la question posée consiste à prendre, non pas une mais plusieurs bandes de longueur L. Et pour cela commencer avec deux bandes de longueur L.

En effet, les élèves peuvent se douter, même s'ils ne l'expriment pas ainsi, que pour résoudre cette question, il va falloir obtenir un nombre entier de bandes de longueur l dans un multiple de la bande de longueur L (en en mettant un certain nombre bout à bout puisqu'ajouter des longueurs consiste à mettre bout à bout et rectilignement les segments ou les bandes dans ce cas). Il est possible que certains élèves se souviennent que $L = 4{,}5l$ ou encore $4l + 1u$ et que constituer une grande bande avec des bandes de longueur L résoudra la difficulté causée par $0{,}5l = 1u$ en prenant un nombre pair de bandes de longueur L. Or, le premier nombre pair qu'ils vont rencontrer est 2.

La figure 5 montre la réalisation en classe d'une disposition des bandes de papier qui fournit la réponse recherchée. Dans certaines classes, afin de ne pas avoir à constituer pour chaque cours de nouvelles bandes de papier, les professeurs ont fabriqué, à l'aide d'imprimantes 3D, des réglettes en plastique mises à la disposition des élèves.

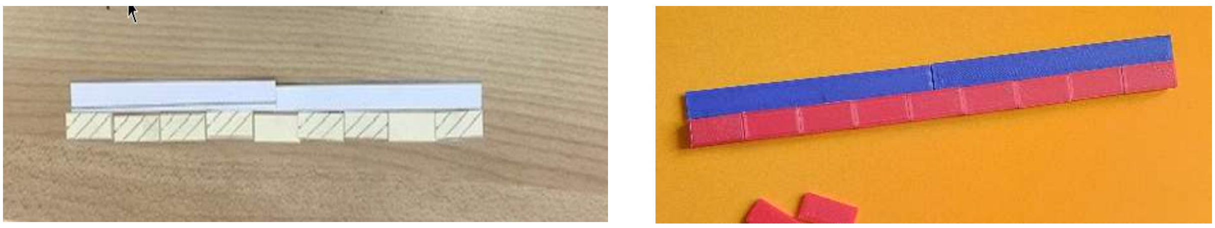


Figure 5. – Réalisation matérielle en classe de 6^e^ de l'égalité $9l = 2l$.

Le professeur fait remarquer que l'on vient de trouver trois égalités portant sur l et L. Les nombres 2, 9, $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$ ne font que traduire ce que l'on a fait avec les bandes de papier, comment on les a disposées, mais on n'a pas changé les longueurs l et L de ces bandes.

3. 3. Au-delà de la réalisation de la tâche précédente, exploration du type de tâches sur plusieurs spécimens et routinisation de la technique

Le travail qui suit pourrait être organisé hors du temps de la classe. Pour cela, il faudrait diviser la classe en quatre groupes qui obtiendraient chacun, à l'issue de leur travail, quatre égalités différentes pour $mL = nl$. Ce qui suppose un stock de bandes de papier assez important ! D'où peut-être un problème à résoudre…

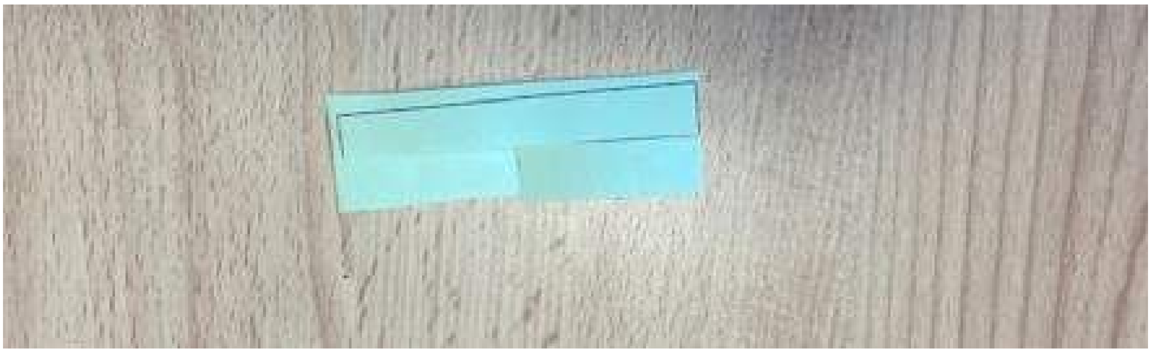
On demanderait de retour en classe et après vérification du travail fait, à un représentant de chaque groupe d'écrire au tableau et sous le contrôle des autres membres de son groupe, l'égalité obtenue avec ses propres bandes de papier. Le travail collectif peut alors s'organiser ensuite pour chacune des égalités afin d'obtenir les écritures fractionnaires des mesures de L et l.

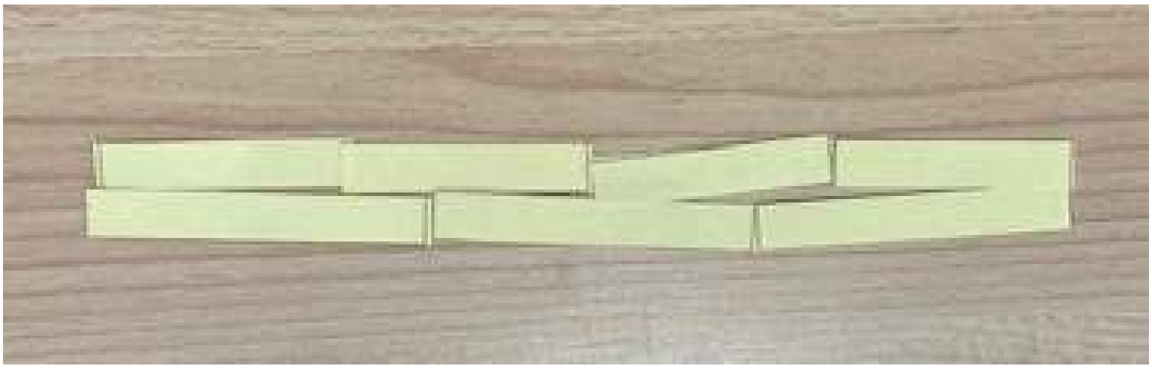
Une fois établi « le phénomène » qui consiste à obtenir trois égalités pour la même situation, il semble nécessaire de faire le même travail avec des couples de bandes de papier différents, aboutissant par exemple à $3L = 4l$; $5L = 10l$; $5l = 2L$; etc. Il s'agit ainsi de s'engager dans une décontextualisation et, par exemple, de constater matériellement que $5L = 10l$ est équivalent à $L = 2l$. On peut alors commencer à faire vivre l'idée de l'équivalence des fractions : ***les égalités écrites avec des nombres ne dépendent pas des nombres, mais des longueurs l et L des bandes de papier et de la disposition de ces bandes de papier, ce qu'indiquent les nombres.*** En même temps que l'on écrit les trois égalités obtenues, commence à vivre la technique qui permet de passer du produit au quotient, de $a = bq$ à $q = \frac{a}{b}$ ou de $bq = a$ à $q = \frac{a}{b}$.
Cette relation sur les scalaires a, b et q sera établie et travaillée plus loin, lors de la quatrième séquence.

Ci-dessous, le travail décrit a été réalisé en classe. Le professeur distribue un couple de ces bandes, par exemple celui qui correspond à $3L = 4l$. Il dit : « Voici deux bandes de papier de longueurs l et L différentes des précédentes. Vous pouvez constater que la longueur L n'est pas égale à un nombre de fois la longueur l. »

Question cruciale : Peut-on comme précédemment, sans rechercher une longueur-unité qui leur soit commune, construire deux bandes de papier <u>de même longueur</u> en utilisant pour l'une seulement des bandes de longueur l et pour l'autre seulement des bandes de longueur L ? Quelle égalité obtient-on et à quoi est égale l en fonction de L, et L en fonction de l ?

Une fois distribué le couple tel que $3L = 4l$, on passe aux autres couples $5L = 10l$; $5l = 2L$; $L = 2l$ avec les mêmes questions.





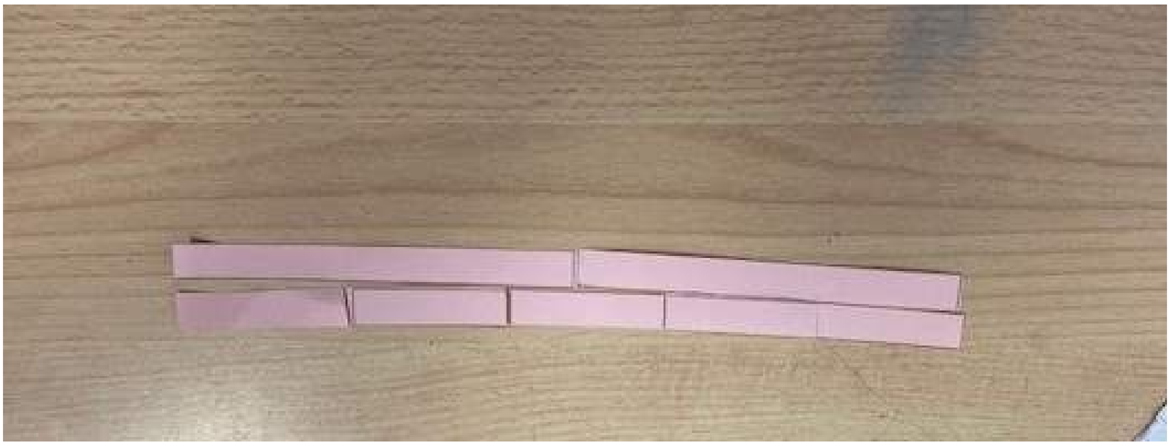


Figure 6. – Réalisation matérielle en classe de 6e des égalités $L = 2l$, $3L = 4l$, $2L = 5l$

3.3.1 - Institutionnalisation

Ecrire $9l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

Ecrire $3L = 4l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{3}{4}L$ et $L = \frac{4}{3}l$.

Ecrire $5L = 10l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{5}{10}L$ et $L = \frac{10}{5}l$.

Remarque : dans ce cas, il a suffi de constater que $L = 2l$

Ecrire $5l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{5}L$ et $L = \frac{5}{2}l$.

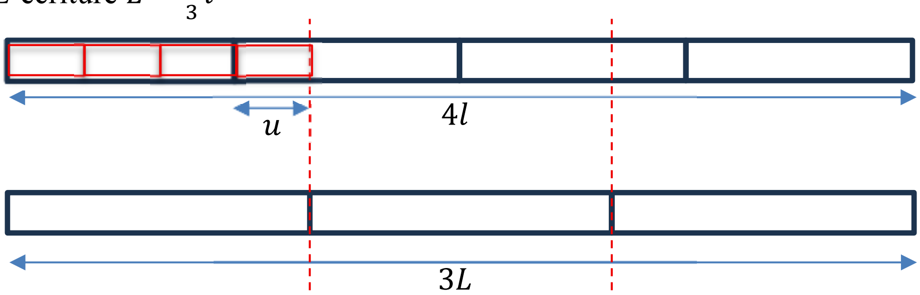
Nous avons observé en classe, à partir de l'égalité $4l = 3L$ que les élèves pouvaient donner trois significations différentes des égalités qui en résultent, écrites sous forme de fractions. Celles-ci correspondent aux mesures différentes obtenues à partir de choix différents pour les longueurs unités :

$$L = \frac{4}{3}l \qquad L = 4 \times \frac{1}{3}l \qquad L = \frac{4l}{3}$$

Ces trois écritures acceptables correspondent à des interprétations différentes de la situation correspondant à $4l = 3L$.

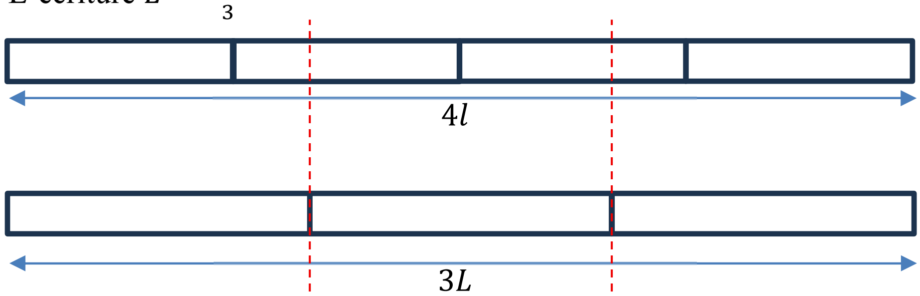
En effet, le schéma ci-dessous lu de trois manières différentes justifie ces trois écritures :

1er cas : L'écriture $L = \frac{4}{3}l$



L'usage de l'unité auxiliaire $u = \frac{1}{3}l$ permet de lire que $L = 4 \times \frac{1}{3}l$ admis comme s'écrivant $L = \frac{4}{3}l$ qui peut aussi s'écrire $L = \frac{1}{3} \times 4l$.

2ème cas : L'écriture $L = \frac{4l}{3}$



Le schéma montre que la bande de longueur $4l$ est découpée en 3 parts de longueurs égales à L.

<u>Remarque importante !</u>

Dans $u = \frac{1}{3}l$, la fraction $\frac{1}{3}$ est la mesure et l'unité est l.

Dans $L = 4 \times \frac{1}{3}l$, l'entier 4 est la mesure et l'unité est $\frac{1}{3}l$.

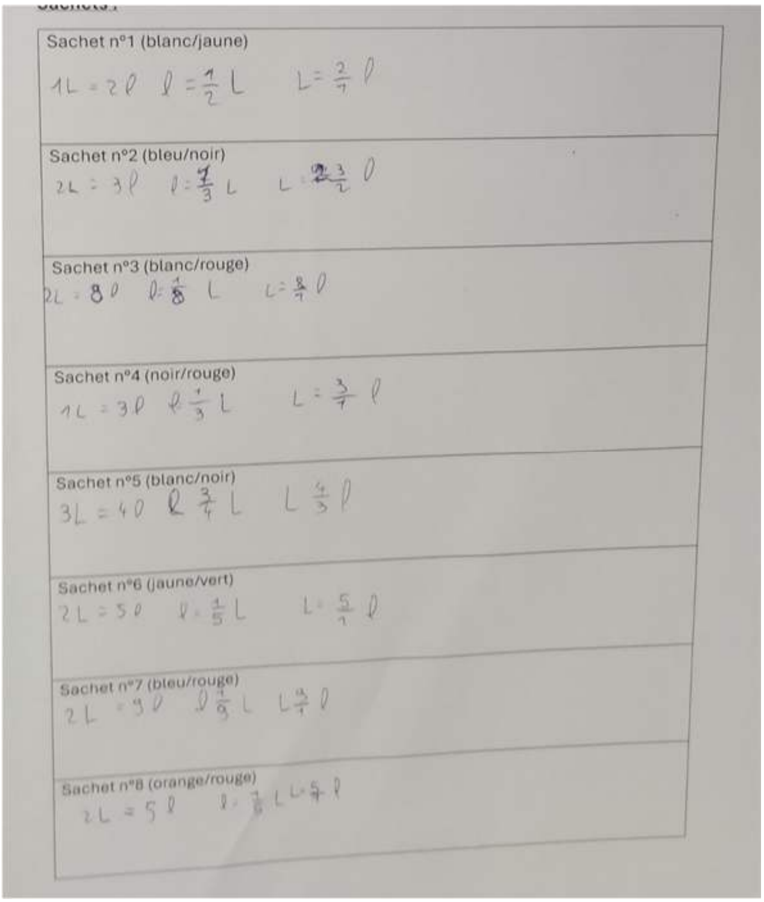
Dans $L = \frac{1}{3} \times 4l$, la fraction $\frac{1}{3}$ est la mesure et l'unité est $4l$.

Dans $L = \frac{4}{3}l$, la fraction $\frac{4}{3}$ est la mesure et l'unité est l.

Et dans $L = \frac{4l}{3}$, on a divisé la longueur $4l$ par 3.

Les quatre premières écritures correspondent à des changements d'unités : on passe de l à $\frac{1}{3}l$ puis à $4l$ pour revenir à l.

Ceci marque une étape importante dans les calculs sur les grandeurs : les opérations sur les fractions de dénominateurs différents (addition, soustraction, ordre) seront vues comme des opérations portant sur des mesures réalisées avec des unités différentes. <u>D'où la justification de la mise au même dénominateur qui consiste à convertir les mesures de grandeurs dans la même unité.</u> C'est un prélude à toutes les conversions qui suivront pour les grandeurs usuelles (longueurs, aires, volumes, durées, masses).



Sachet n°1 (blanc/jaune)

1L = 2l l = 1/2 L L = 2/1 l

Sachet n°2 (bleu/noir)

2L = 3l l = 1/3 L L = 3/2 l

Sachet n°3 (blanc/rouge)

2L = 8l l = 1/8 L L = 8/1 l

Sachet n°4 (noir/rouge)

1L = 3l l 1/3 L L = 3/1 l

Sachet n°5 (blanc/noir)

3L = 4l l 3/4 L L 4/3 l

Sachet n°6 (jaune/vert)

2L = 5l l = 1/5 L L = 5/1 l

Sachet n°7 (bleu/rouge)

2L = 9l l 1/9 L L 9/1 l

Sachet n°8 (orange/rouge)

2L = 5l l = 1/5 L L = 5/1 l

Figure 7. – Séance d'exercices sur les différentes égalités à partir de $al = bL$.

3.3.2 – Exercices – Travail de la technique - Routinisation

Exercice 0

Donner au moins deux phrases différentes permettant l'interprétation de l'égalité $2L = 9l$.

1. ………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………
2. ………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………

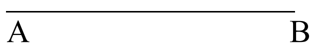
Exercice 1

a) On sait que si une égalité $L = \frac{9}{7}l$ est vraie, c'est parce que L et l peuvent être mesurées par une même unité u (qui pourtant n'est pas visible dans cette formule).
En utilisant uniquement les données tirées de la formule $L = \frac{9}{7}l$, dire combien mesure L si l'unité choisie est u ? Et combien mesure l si l'unité choisie est u ? Puis combien mesure u si on choisit l pour unité ? Et combien mesure u si on choisit L pour unité ?
En utilisant le quadrillage suivant, créez une unité u qui permet de vérifier vos hypothèses.

b) Mêmes questions avec $s = \frac{5}{6}S$.

Exercice 2

a. La longueur du segment [AB] ci-dessous représente les $\frac{4}{7}$ de la longueur d'un segment [EF]. Construire le segment [EF] sans mesurer avec une règle graduée.



b. On sait que $l = \frac{2}{9}L$, à quoi est égal $9l$?
c. On sait que $7l = 3L$, à quoi est égal l ?
d. On sait que $7l = 3L$, à quoi est égal L ?
e. On sait que $L = \frac{5}{3}l$ à quoi est égal l ?
f. Etc.

<u>Exercice 3</u>
En utilisant deux bandes de papier de longueurs l et L, on a réussi à obtenir des longueurs égales. Compléter les deux cases vides de chaque colonne avec des écritures équivalentes à l'égalité qui figure dans la colonne :

$9 \times l = 4 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$	$10 \times l = 3 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$
$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{8}{9} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$
$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{7}{6} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{13}{5} \times l$

<u>Exercice 4</u>
Dans chacune des cases de ce tableau, les expressions qui s'y trouvent mettent en relation deux grandeurs : par exemple d'une part a et b, puis c et d, etc.
Dans chaque cas, quelle est la plus grande des deux grandeurs et pourquoi ?

$12 \times a = 7 \times b$	$5 \times c = 2 \times d$	$e = \frac{9}{7} \times f$	$g = \frac{5}{6} \times h$	$\frac{9}{11} \times i = j$
$k = \frac{5}{7} \times l$	$10 \times m = 3 \times n$	$17 \times p = 9 \times q$	$\frac{13}{3} \times r = s$	$43 \times u = 12 \times b$

4e séquence : un même travail sur une autre grandeur que la longueur, vers les fractions abstraites

4. 1. Cadrage mathématique et didactique

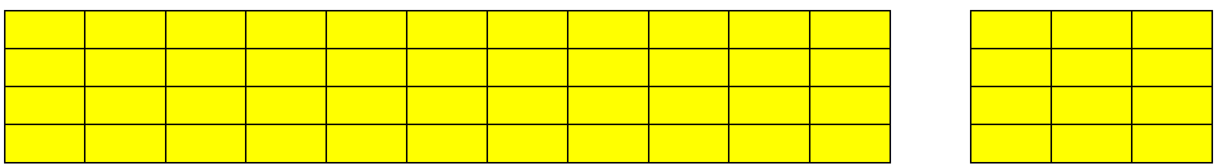
De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». Le professeur peut se dispenser de leur lecture s'il souhaite seulement disposer d'un cours à partir de cette proposition. ***Les compléments à la 4e séquence explicitent le passage des fractions de grandeur aux fractions abstraites.***

L'exemple que l'on vient de traiter dans la séquence 3 porte sur la grandeur « longueur ». Dans la séquence 4, on découvre que ce que l'on vient d'étudier dans les séquences 2 et 3 s'applique aussi à d'autres grandeurs, par exemple à l'aire. On s'achemine ainsi vers l'étude du caractère général des organisations mathématiques qui ont pu être rencontrées à propos de grandeurs particulières. Le travail mené sur des mesures rationnelles de grandeurs, qui a permis de disposer de nouveaux nombres en tant que mesures, apparaît indépendant de la grandeur considérée. La fraction de grandeur commence à céder la place à la fraction « abstraite » de la grandeur dont elle permettait une mesure.

Bien qu'une partie de cette séquence, la partie 4. 2., ait été réalisée en classe, il semble qu'elle risque de « manger » du temps et que l'aspect « nouveauté » en soit absent ; donc que cela ennuie les élèves.
Si la première raison est à prendre en considération, la deuxième raison est discutable.
D'une part parce qu'il y a du nouveau dans cette séance : ce que l'on vient de travailler et d'obtenir sur une certaine grandeur, la longueur, s'applique-t-il à une autre ? C'est donc la question du caractère généraliste de ce qui vient d'être découvert qui est travaillé, bien qu'avec une forte dimension locale et limitée à deux grandeurs ; mais cet aspect généraliste n'est pas négligeable en mathématiques. D'autre part, tout ne doit pas relever du nouveau lorsqu'on fait des mathématiques : il faut du temps et un travail répétitif pour que les techniques, et ce qui les justifie, deviennent routinières et maîtrisées. Des élèves apprécient le travail qui ne consiste pas à se lancer à l'attaque d'une question nouvelle, mais qui permet de « souffler » !

Aussi, il est sans doute possible d'organiser, en partie hors classe, la seule partie 4. 2. de la proposition qui suit. Cela donne matière à mise en commun et institutionnalisation en 4. 3., une fois réintroduit un travail en classe, et selon le principe exposé précédemment : des groupes ou l'ensemble des élèves travaillent individuellement hors classe, puis un élève de chaque groupe, ou quelques élèves désignés par le professeur, exposent publiquement les résultats obtenus et la classe en discute.

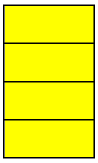
4. 2. Question génératrice : Peut-on dire de combien de fois l'aire B du rectangle ci-dessous est plus grande que l'aire A de l'autre rectangle ?



Aire *B* Aire *A*

On a volontairement choisi deux rectangles de même largeur ; l'exercice 2, en fin de séquence, fait travailler les élèves sur des rectangles dont les deux dimensions diffèrent ; ce qui permet de mettre davantage l'accent sur l'aire comme « nouvelle » grandeur. Il est possible que les élèves choisissent tout d'abord l'aire A comme aire-unité et constatent alors qu'ils échouent et qu'il faut décider d'une aire-unité plus petite. Aux yeux des élèves, le quadrillage est la véritable nouveauté en tant qu'ostensif qu'ils s'empressent d'utiliser (avec raison) pour formuler les égalités. Le travail à l'aide de cet ostensif permet aux élèves les plus en difficulté une visualisation très rapide du pliage ou de la décomposition.

Question cruciale : Peut-on trouver une aire-unité afin d'écrire des relations entre A et B telles que celles précédemment établies, notamment en utilisant des fractions ?
Par exemple : si on choisit pour aire-unité l'aire du rectangle ci-dessous :



Alors on a : $B = u + u + u + u + u + u + u + u + u + u + u = 11u$ et $A = u + u + u = 3u$.
B mesure 11 si on prend u pour aire-unité et A mesure 3 si on prend u pour aire-unité.
La figure 7 montre la rédaction de la synthèse de cette phase rédigée sur un cahier d'élève. Ils ont tout d'abord choisi l'aire A comme aire-unité, constaté qu'ils échouent, ont décidé d'une aire-unité plus petite et l'ont utilisée pour écrire : « aire A = 11 unités d'aire ; aire B = 3 unités d'aire ».

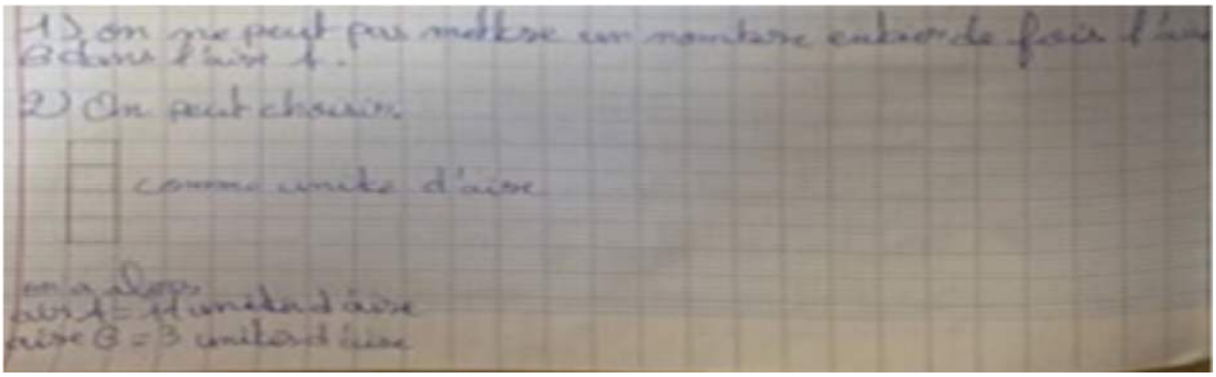


Figure 7. – Choix d'une unité d'aire puis mesures d'aires en classe de 6e

Autrement dit comme $u = \frac{1}{11}B$, on a : $A = \frac{3}{11}B$; comme $u = \frac{1}{3}A$, on a : $B = \frac{11}{3}A$.

Dans le cas où, comme ce qui précède, ce sont seulement des relations du type $A = qB$ qui ont été trouvées par les élèves, on pose la question cruciale suivante :

Question cruciale : Combien faudrait-il de rectangles d'aire A et combien faudrait-il de rectangles d'aire B pour obtenir deux rectangles d'aires égales ? (Ou encore, peut-on obtenir une relation du type $a \times A = b \times B$ à partir de $A = \frac{3}{11}B$ ou de $B = \frac{11}{3}A$?)

Il est possible qu'avec des rectangles la manipulation matérielle soit plus délicate qu'avec des segments : il faut superposer un certain nombre de fois la surface d'aire A (11 fois) sur un certain nombre de fois la surface d'aire B (3 fois). Si c'est le cas, la réponse obtenue par manipulation de ces objets étant trop coûteuse, alors les élèves s'orienteront vers la transformation des écritures précédemment obtenues : par exemple $A = \frac{3}{11}B$ *afin d'écrire 11A = 3B.*

On obtient donc $11A = 3B$, que l'on choisisse d'écrire A en fonction de B ou B en fonction de A.

On a aussi constaté que l'on obtient le même type de relations quelle que soit la grandeur considérée, longueur ou aire. Autrement dit, ***la nature de la grandeur n'intervient pas*** dans la propriété qui permet de passer d'une égalité entre deux grandeurs à deux autres égalités qui expriment l'une des grandeurs en fonction de l'autre à l'aide d'une fraction.

4. 2.1 - Institutionnalisation

Que les grandeurs g et G représentent des longueurs ou des aires, on a toujours trouvé que :

- écrire $9g = 2G$ équivaut à écrire $g = \frac{2}{9}G$ et $G = \frac{9}{2}g$
- écrire $11g = 3G$ équivaut à écrire $g = \frac{3}{11}G$ et $G = \frac{11}{3}g$

4.2.2 – Exercices – Travail de la technique - Routinisation

__Exercice 1__

Déterminer ce qu'il manque dans chacun des cas suivants pour que l'égalité soit vraie.

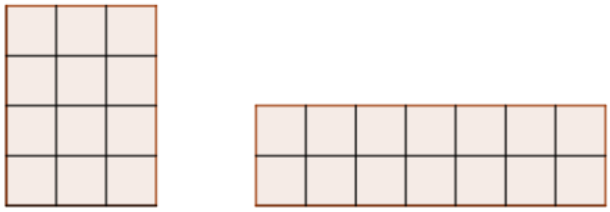
a) $3 \times \frac{\dots\dots}{\dots\dots} u = u$ b) $\dots \times \frac{2}{\dots\dots} L = 2L$ c) $\dots . L = 4 \times \frac{\dots\dots}{4} L$

d) $\dots\dots \times \frac{\dots\dots}{7} S = 3S$

__Exercice 2__

1. Si $3g = 2G$, *quelles autres égalités peut-on écrire ?*
2. *Même question avec :*
   - $5g = 4G$;
   - $6G = 2g$;
   - etc.
3. Si on a $g = \frac{5}{2}G$, *quelle égalité ne faisant intervenir aucune fraction, pouvons-nous écrire ?*
4. *Même question avec :*
   - $G = \frac{3}{4}g$;
   - $\frac{6}{7}S = s$

__Exercice 3 -__ Quelles égalités du même type que celles de l'exercice 3 peut-on écrire entre l'aire A et l'aire B des rectangles ci-dessous ?



Aire A Aire B

<u>Exercice 4 -</u> Construire un polygone d'aire B de telle manière que l'aire A du rectangle ci-dessous en représente les $\frac{4}{7}$.

<u>Exercice 5</u> – Compléter les inégalités suivantes avec les symboles > ou <, en justifiant votre choix par une phrase.

a) $\frac{8}{9}$ ……. $\frac{10}{9}$ b) $\frac{4}{7}$ ……. $\frac{3}{7}$ c) $\frac{7}{4}$ …… $\frac{9}{4}$

Il s'agit de commencer à faire ***travailler la technique*** *qui s'appuie sur (b ≠ 0 ; bq = a) ⇔ (q = $\frac{a}{b}$) dans le sens direct et aussi dans le sens réciproque, souvent oublié. Pour cela, on travaille le geste qui consiste à déterminer le quotient lorsqu'on connaît le produit et le produit lorsqu'on connaît le quotient.*

4. 4. Recherche d'un nombre inconnu dans une égalité entre grandeurs

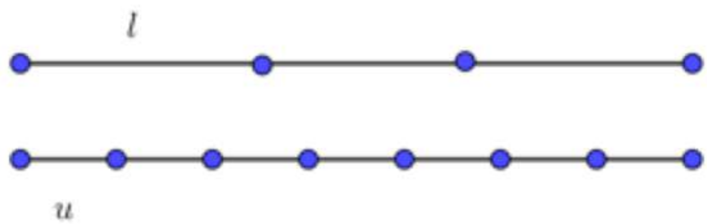
On commence par faire rechercher à quoi doit être égal le scalaire q pour que la relation « b(qu) = au » soit vérifiée, a et b étant des entiers naturels donnés avec b ≠ 0. Cette égalité, en fait une équation, porte sur des grandeurs ***de même espèce*** *et de dimension 1 ; par exemple la longueur. Il s'agit d'une multiplication par un scalaire, dans ce cas le nombre b. Comme précédemment, on fait éprouver le fait que le travail mené tout d'abord sur une grandeur particulière se généralise à n'importe quelle autre grandeur. On s'abstrait ainsi de l'appui sur une grandeur pour ne plus travailler que sur des « grandeurs abstraites ». Comme il n'est plus nécessaire de mentionner une grandeur, il devient inutile de noter l'unité u de la grandeur.*

On aboutit ainsi à la définition du quotient en termes de scalaires : « a et b étant des entiers naturels avec b ≠ 0, le quotient q de a par b est la solution de l'équation d'inconnue q : bq = a » ; définition qui sera transposée au niveau du cursus de 6^{e}, bien que la notion d'équation y soit d'ores et déjà travaillée, par exemple à partir « d'égalité à trou », même si le nom n'est pas prononcé.

Question génératrice : Un segment de longueur inconnue est tel que trois fois cette longueur mesure 7u ; u étant la longueur-unité. Quelle est la mesure de la longueur de ce segment ?

Question cruciale : Comment désigner une longueur inconnue ?

Il y a des chances que les élèves décident d'appeler l ou x cette longueur inconnue. Un premier travail consiste à transformer l'énoncé de la question cruciale en une écriture mathématique, comme celles trouvées précédemment.



On a donc $3l = 7u$. Comme l'institutionnalisation précédente l'indique, alors $l = \frac{7}{3}u$.

Nouvelle question cruciale : Que deviendrait la réponse à cette question s'il s'agissait d'une aire inconnue telle que trois fois cette aire donne 7a ; a étant l'aire-unité ? Et s'il s'agissait d'un poids inconnu tel que trois fois ce poids donne 7p ; p étant le poids-unité ?

On aurait alors $A = \frac{7}{3}a$ et $P = \frac{7}{3}p$.

Conclusion : si, une unité ayant été choisie, les mesures de grandeurs différentes sont toujours les mêmes, le calcul ne change pas.
Si, une unité ayant été choisie, on appelle q la mesure cherchée, alors quelle que soit la grandeur choisie, on a chaque fois : $3q = 7$ qui donne pour résultat $q = \frac{7}{3}$. q s'appelle ***le quotient de 7 par 3.***

4.4.1 - Institutionnalisation

Institutionnalisation : le nombre inconnu q tel que $3q = 7$ s'appelle ***le quotient*** de 7 par 3 et se note $\frac{7}{3}$. C'est ***le nombre*** qui multiplié par 3 donne 7 comme l'indique l'égalité $3q = 7$.

En résumé : Si $3q = 7$, alors $q = \frac{7}{3}$, et réciproquement : si $q = \frac{7}{3}$ alors $3q = 7$.

On remarque alors que : $3q = 3 \times \frac{7}{3} = 7$.

4.4.2 – Exercices – Travail de la technique – Routinisation

Exercice 1 - Déterminez les nombres inconnus q, x, y, z, t, k tels que :
$2q = 3$; $5x = 9$; $8y = 24$; $17z = 10$; $15t = 5$; $3k = 27$.

Exercice 2 - Quel est le quotient de :
8 par 5 ; 9 par 27 ; 27 par 9 ; 2 par 3 ; 3 par 2 ; etc. ?

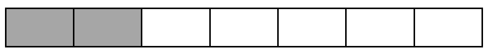
5^e séquence : l'addition des fractions comme mesure de longueurs

De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». Le professeur peut se dispenser de leur lecture s'il souhaite seulement disposer d'un cours à partir de cette proposition. ***Les compléments à la 5^e séquence reviennent sur la délicate dialectique système-modèle. Le système est constitué des bandes de papier, le modèle est quant à lui de nature algébrique. Travailler dans le modèle provoque « l'oubli » de certaines manipulations sur les bandes de papier ; notamment « l'oubli » de la justification de n'ajouter que les numérateurs lorsque les dénominateurs sont égaux.***

Cette séquence sur l'addition des fractions de même dénominateur clôt la partie du programme actuel de 6^e sur les fractions. Les séquences à venir organisent la poursuite de ce PER sur le thème des fractions pour les programmes actuels des classes de 5^e et 4^e.

5. 1. Question génératrice : à quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout dont on connaît les longueurs ? Comment faire ?

Il y a des chances que les élèves disent tout simplement qu'il suffit d'ajouter les longueurs. Ils ont raison !
D'où la ***question cruciale suivante :***
A quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout et de longueurs $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$? Et si ces deux segments ont pour longueurs $\frac{9}{2}l$ et $\frac{3}{2}l$?
On revient pour cela aux bandes de papier.
Ainsi, deux bandes de longueurs respectives $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$ sont mises bout à bout :



Dans lesquelles $\frac{1}{9}L$ est la longueur de $\square$ la bande. Le comptage du nombre de fois où la longueur $\frac{1}{9}L$est reportée dans la longueur de la bande obtenue par réunion des deux bandes permet d'affirmer que $\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L = \frac{2+5}{9}L = \frac{7}{9}L$.

Les élèves peuvent trouver très simples les réponses : $\frac{7}{9}L$ et $\frac{12}{2}l$. En fait, elles utilisent toutes deux la distributivité de la multiplication externe (les scalaires du type $\frac{a}{b}$) sur les grandeurs (représentées par L et l). D'où la nécessité de faire écrire des calculs qui peuvent paraître triviaux, mais qui ne le sont mathématiquement pas. Il est aussi nécessaire de faire remarquer que $\frac{12}{2}$ $l = 6l$ et aussi, travail d'une « technique réciproque », de faire décomposer additivement des fractions supérieures à 1. Donc, dès que les élèves ont donné les réponses *pour les longueurs des « segments-somme », leur demander d'écrire leurs calculs. On écrit ainsi :*

$\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L = \frac{2+5}{9}L = \frac{7}{9}L$

et $\frac{9}{2}l + \frac{3}{2}l = \frac{9+3}{2}l = \frac{12}{2}l$.

En ce point, on peut demander une vérification avec des bandes de papier pour la dernière somme, afin d'établir que $\frac{12}{2}l = 6l$. Ce qui atteste, une fois de plus, que la fraction représente un quotient.

De même : $\frac{3}{2}l = \frac{2}{2}l + \frac{1}{2}l = l + \frac{1}{2}l$ d'où l'utilité de savoir qu'une fraction dont les numérateurs et dénominateurs sont égaux est égale à 1 (*cf.* séquence 2).

5. 1.1 - Institutionnalisation

Ce que l'on vient de trouver est vrai pour n'importe quels fractions de grandeur. Pour ajouter deux fractions de grandeur de même dénominateur, on ajoute entre eux les numérateurs.

Par exemple : $\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L = \frac{2+5}{9}L = \frac{7}{9}L$

5.1.2 – Exercices – Travail de la technique – Routinisation

<u>Exercice 1</u>

Effectuer les calculs suivants en montrant l'étape intermédiaire.

$a = \frac{2}{9}l + \frac{1}{9}l$	$b = \frac{4}{13}l + \frac{7}{13}l$	$c = \frac{2}{19}l + \frac{3}{19}l$	$d = \frac{12}{25}l + \frac{2}{25}l$
$e = \frac{4}{23}l + \frac{7}{23}l$	$f = \frac{63}{71}l + \frac{5}{71}l$	$g = \frac{2}{6}l + \frac{3}{6}l$	$h = \frac{8}{13}l + \frac{7}{13}l$

<u>Exercice 2</u>

Donner le résultat des calculs suivants :

$a = \frac{2}{9}l + \frac{1}{9}l$	$b = \frac{4}{13}l + \frac{7}{13}l$	$c = \frac{2}{19}l + \frac{3}{19}l$	$d = \frac{12}{25}l + \frac{2}{25}l$
$e = \frac{4}{23}l + \frac{7}{23}l$	$f = \frac{63}{71}l + \frac{5}{71}l$	$g = \frac{2}{6}l + \frac{3}{6}l$	$h = \frac{8}{13}l + \frac{7}{13}l$

<u>Exercice 3</u>

Décomposer, quand c'est possible, les fractions suivantes afin de faire apparaitre un nombre entier le plus grand possible.

a) 12/7
b) Etc.

<u>Exercice 4</u>
Ajouter des longueurs dont les mesures sont des fractions de même dénominateur, décomposer additivement des fractions supérieures à 1 et, notamment, démontrer par le calcul que $\frac{12}{2}l = 6l$, que $\frac{15}{3}l = 5l$, etc.

Pour montrer que $\frac{12}{2}l = 6l$ et que $\frac{15}{3}l = 5l$, on peut décomposer additivement $\frac{12}{2}l$ et $\frac{15}{3}l$, en faisant apparaître des fractions de numérateurs égaux à 2 et 3 et en montrant que $\frac{a \times b}{c} = a \times \frac{b}{c}$.

On obtient : $\frac{12}{2}l = \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l = 6 \times \frac{2}{2}l = l + l + l + l + l + l = 6l.$

Or, $\frac{12}{2}l = \frac{6 \times 2}{2}l$ *et on vient de trouver que* $\frac{12}{2}l = 6 \times \frac{2}{2}l$. *Donc* $\frac{6 \times 2}{2}l = 6 \times \frac{2}{2}l$.

De même pour $\frac{15}{3}l = \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l = 5 \times \frac{3}{3}l = 5l.$

Or, $\frac{15}{3}l = \frac{5 \times 3}{3}l$ *et on vient de trouver que* $\frac{15}{3}l = 5 \times \frac{3}{3}l$. *Donc* $\frac{5 \times 3}{3}l = 5 \times \frac{3}{3}l$.

*Dans le cas où le numérateur n'est pas un multiple du dénominateur, on peut tenter de le démontrer sur un cas particulier. Mais **le calcul est plus délicat** car il est guidé par ce que l'on souhaite par avance obtenir. Par exemple :*

$\frac{2 \times 5}{9} = \frac{9}{9} + \frac{1}{9}$ *; arrivé en ce point, il faut décomposer additivement $\frac{9}{9}$ pour faire apparaître ce que l'on cherche, à savoir des fractions en $\frac{5}{9}$. Le calcul continue ainsi :*

$$\frac{2 \times 5}{9} = \frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = 2 \times \frac{5}{9}.$$

Ce type de travail peut-il être donné à rechercher en travail personnel hors classe, ou bien est-il d'un niveau de technicité trop élevé en 6e et doit alors être complétement pris en charge par le professeur ?

Question et remarque :

- comment calculer la différence de deux longueurs ?
- ce qui est vrai pour les longueurs est vrai pour les aires et pour n'importe quelle autre grandeur notée g. On peut donc calculer de la même manière $\frac{3}{4}g + \frac{7}{4}g$; $\frac{2}{7}g + \frac{6}{7}g$; etc.

Arrivé en ce point, on insiste sur le fait que ***la technique de calcul*** de la somme de deux fractions de même dénominateur de la même grandeur est toujours la même, quelle que soit la grandeur. On peut donc se restreindre à un calcul sur des « fractions abstraites », en tant que mesures de grandeur, mais sans que l'on ait à connaître de quelle grandeur elles sont des mesures.

Question génératrice : on a vu que les fractions de grandeurs peuvent être ajoutées et soustraites. Peut-on calculer sur des fractions sans les associer à des grandeurs, autrement dit peut-on calculer seulement sur les mesures en ne tenant pas compte des grandeurs ?

Par exemple calculer $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$; $\frac{2}{7} + \frac{6}{7}$; etc. ?

Dans ce cas, à quoi serait égal $3 \times \frac{7}{4}$; $2 \times \frac{3}{5}$; $4 \times \frac{2}{3}$; etc. ?

On peut supposer que les élèves s'engageront spontanément dans le produit de l'entier par le numérateur ou, pour ceux qui en doutent, dans l'addition répétée indiquée par l'entier, ou encore dans un retour à la signification de ces produits à l'aide d'une grandeur, par exemple la longueur.

5.1.3 - Institutionnalisation

- Pour ***ajouter ou soustraire*** des fractions de ***même dénominateur***, on ajoute ou soustrait leurs numérateurs.

Exemples : $\frac{2}{7} + \frac{6}{7} = \frac{2+6}{7} = \frac{8}{7}$ et $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{12-8}{5} = \frac{4}{5}$

- Pour ***multiplier un nombre entier*** par une fraction on multiplie ce nombre par le numérateur de la fraction.

Exemple : $3 \times \frac{7}{4} = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4}$.

5.1.4 – Exercices – Travail de la technique - Routinisation

Exercice 1

Dans les expressions suivantes, quelles sont les unités qui sont comptées ?

a) vingt-trois stylos ;
b) soixante têtes et cent-vingt pieds ;
c) trois centaines de soldats ;
d) trente douzaines d'huîtres ;
e) quinze demi-douzaines d'œufs ;
f) une demi-heure ;
g) trois quarts d'heure ;
h) trois septièmes de vingt et un centimètres ;
i) deux neuvièmes de l'aire de la classe ;
j) sept demi de quarante six personnes.

Exercice 2

Dans les expressions suivantes, quelles sont les unités qui sont comptées ?

a) Cent trente minutes
b) Deux cents perles
c) Trois centaines de colliers
d) Six douzaines d'huîtres
e) Cent vingt huîtres
f) Sept demi-heures
g) Quatre quinzaines de jours
h) Huit semaines
i) Cinq pieds et six pouces

Exercice 3

Ecrire, sous forme mathématique, l'égalité qui est interprétée par chacune des phrases suivantes :

a) Pour obtenir l'aire de la surface *d*, il faut prendre l'aire de la surface *D*, la diviser en 8 parts égales et en prendre 3.

b) Pour fabriquer l'unité de longueur *u*, il faut prendre la longueur *AB*, la diviser en 4 parts égales et en prendre 1.

c) Si je considère la grandeur *G* d'un objet, que je la divise en 7 parts égales et que j'en prends 5, j'obtiendrai la grandeur *g*.

d) Pour obtenir une masse *m*, je sépare un objet de masse *M* en 9 parties égales et j'en prends 7

e) Pour remplir un solide de volume *s*, je partage un solide de volume *S* en 6 parts égales et j'en utilise 5.

Exercice 4

En utilisant deux bandes de papier de longueurs *l* et *L*, on a réussi à obtenir des longueurs égales. Compléter les deux cases vides de chaque colonne avec des écritures équivalentes à l'égalité qui figure dans la colonne :

$9 \times l = 4 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$	$10 \times l = 3 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$
$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{8}{9} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$
$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{7}{6} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{13}{5} \times l$

Exercice 5

En utilisant deux bandes de papier de longueurs *l* et *L*, on a réussi à obtenir des longueurs égales. Compléter les deux cases vides de chaque colonne avec des écritures équivalentes à l'égalité qui figure dans la colonne :

$\ldots \times l = \cdots \times L$	$12 \times l = 7 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$	$15 \times l = 6 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$
$l = \frac{4}{5} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$
$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{21}{13} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{81}{2} \times l$

Exercice 6

En utilisant deux bandes de papier de longueurs *l* et *L*, on a réussi à obtenir des longueurs égales. Compléter les deux cases vides de chaque colonne avec des écritures équivalentes à l'égalité qui figure dans la colonne :

$\ldots \times l = \cdots \times L$	$15 \times l = 4 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$	$26 \times l = 11 \times L$	$\ldots \times l = \cdots \times L$
$l = \frac{3}{7} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$	$l = \frac{\cdots}{\cdots} \times L$
$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{17}{2} \times l$	$L = \frac{\cdots}{\cdots} \times l$	$L = \frac{17}{13} \times l$

Exercice 7

Dans chacune des cases de ce tableau, les expressions qui s'y trouvent mettent en relation deux grandeurs : par exemple d'une part *a* et *b*, puis *c* et *d*, etc.
Dans chaque cas, quelle est la plus grande des deux grandeurs et pourquoi ?

$12 \times a = 7 \times b$	$5 \times c = 2 \times d$	$e = \frac{9}{7} \times f$	$g = \frac{5}{6} \times h$	$\frac{9}{11} \times i = j$
$k = \frac{5}{7} \times l$	$10 \times m = 3 \times n$	$17 \times p = 9 \times q$	$\frac{13}{3} \times r = s$	$43 \times u = 12 \times b$

Exercice 8

Dans chacune des cases de ce tableau, les expressions qui s'y trouvent mettent en relation deux grandeurs : par exemple d'une part *a* et *b*, puis *c* et *d*, etc.
Dans chaque cas, quelle est la plus grande des deux grandeurs et pourquoi ?

$9 \times a = 10 \times b$	$4 \times c = 3 \times d$	$e = \frac{5}{7} \times f$	$g = \frac{7}{6} \times h$	$\frac{3}{11} \times i = j$
$k = \frac{2}{9} \times l$	$50 \times m = 33 \times n$	$12 \times p = 90 \times q$	$\frac{19}{3} \times r = s$	$4 \times u = 12 \times b$

Exercice 9

A quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout et de longueurs $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$?

Et si ces deux segments ont pour longueurs $\frac{9}{2}l$ et $\frac{3}{2}l$?

De la même façon, donner le résultat des calculs suivants :

$a = \frac{3}{7}\,l + \frac{1}{7}\,l$	$b = \frac{6}{11}\,l + \frac{2}{11}\,l$	$c = \frac{2}{9}\,l + \frac{3}{9}\,l$	$d = \frac{3}{7}\,l + \frac{2}{7}\,l$
$e = \frac{9}{13}\,l + \frac{1}{13}\,l$	$f = \frac{9}{15}\,l + \frac{2}{15}\,l$	$g = \frac{5}{16}\,l + \frac{4}{16}\,l$	$h = \frac{10}{13}\,l + \frac{7}{13}\,l$

Exercice 10

De la même façon, donner le résultat des calculs suivants :

$a = \frac{2}{9}\,l + \frac{1}{9}\,l$	$b = \frac{4}{13}\,l + \frac{7}{13}\,l$	$c = \frac{2}{19}\,l + \frac{3}{19}\,l$	$d = \frac{12}{25}\,l + \frac{2}{25}\,l$
$e = \frac{4}{23}\,l + \frac{7}{23}\,l$	$f = \frac{63}{71}\,l + \frac{5}{71}\,l$	$g = \frac{2}{6}\,l + \frac{3}{6}\,l$	$h = \frac{8}{13}\,l + \frac{7}{13}\,l$

6e séquence : travail de la comparaison, de la somme et de la différence dans $\mathbb{Q}_+$ lorsque les dénominateurs sont différents

De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». Le professeur peut se dispenser de leur lecture s'il souhaite seulement disposer d'un cours à partir de cette proposition. ***Les compléments à la 6e séquence portent sur les fractions équivalentes et sur ce qui peut résulter, pour le curriculum personnellement vécu par des élèves, de propositions de manuels sur le thème des fractions de dénominateurs différents.***

6.1. Cadrage mathématique et didactique

Le programme actuel situe le thème des dénominateurs différents au cycle 4 ; en classe de 5e pour ce qui concerne cette séquence. La poursuite du travail à l'intérieur d'un enseignement bâti sur ce PER s'inscrit dans le cadre de la poursuite d'une dialectique entre ***modèle*** et ***système*** ; elle a débuté lors des séances précédentes.

En effet, le PER a permis jusqu'ici de rencontrer et de travailler ***des systèmes*** constitués d'objets sur lesquels sont attachées des grandeurs et que l'on manipule : essentiellement des bandes de papier ou des réglettes à propos desquelles on s'intéresse à la longueur, ou encore des surfaces dessinées sur des feuilles à propos desquelles on s'intéresse à l'aire. On a fait travailler les élèves, depuis le début de ce PER, sur les mesures de ces grandeurs commensurables. Ces mesures sont fractionnaires. Elles sont soit issues de ***rapports de grandeurs*** de même espèce (dans ces cas, toutes deux des longueurs ou des aires), soit issues de la détermination du nombre de fois où une ***grandeur-unité*** permet d'obtenir la mesure de la grandeur attachée à un des objets (la longueur d'une bande ou d'une réglette, l'aire d'une surface).

Progressivement, on a amené les élèves à se rendre compte qu'il était possible de mener à bien ce travail de façon plus économique. Ils ont pu en effet constater qu'une fois qu'on avait choisi l'objet et la grandeur, le travail que l'on avait à faire ne consistait plus, essentiellement, qu'en un calcul sur les mesures ; et cela, remarque fondamentale, ***quelle que soit la grandeur***. C'est ainsi que, dans un premier temps, on s'est dispensé d'écrire l, L ou A et B lorsqu'il s'agissait de longueurs ou d'aires, et on a désigné la grandeur par g ou G, sans se préoccuper de savoir de quel type de grandeurs il s'agissait. Ainsi, on a pu circonscrire son travail aux seules mesures fractionnaires. Dans ce sens ***la fraction est devenue un modèle*** de mesures de n'importe quelle grandeur attachée à n'importe quel objet. Travaillant par exemple sur la longueur-somme de deux longueurs, on a vu que dans le cas où les mesures sont écrites sous forme de fractions de même dénominateur, la mesure de la longueur totale est obtenue en ajoutant les numérateurs et en conservant les dénominateurs. Il en serait de même si l'on avait à ajouter des aires. Le travail sur les mesures écrites sous forme de fractions revient alors à effectuer des opérations sur des nombres. Le modèle devient un nouveau système qui s'enrichit de nouveaux nombres : les rationnels positifs.

Au cours de l'avancée dans ce PER surgissent de nouvelles questions. Par exemple la suivante : « si l'on sait désormais ajouter des fractions de même dénominateur, comment faire lorsqu'elles sont de dénominateurs différents ? » Le travail de cette question peut se faire dans deux domaines différents :

- soit ***dans le cadre du modèle***, constitué de la fraction $\frac{a}{b}$ ainsi que des relations et opérations connues pour l'instant ($\leq$, + et –), ce qui nécessite alors de posséder quelques connaissances algébriques ou de les étudier,
- soit ***dans le cadre du système antérieur*** à partir duquel les fractions sont devenues des modèles de mesures de grandeurs attachées à des objets : pour les grandeurs précédemment rencontrées, la longueur de bandes de papier ou de réglettes, l'aire de rectangles.

Dans les deux cas, la réponse à la question concernant la somme de fractions de dénominateurs différents passe, pour la recherche d'un dénominateur commun, par l'élément technologique constitué de l'égalité des fractions équivalentes. Se poser la question des fractions équivalentes et la travailler apparaît donc comme ***une question cruciale*** à laquelle il est nécessaire de répondre si l'on souhaite poursuivre l'étude : à savoir, comparer, ajouter ou soustraire des fractions de dénominateurs différents. C'est la raison pour laquelle le sujet des fractions équivalentes est traité à ce moment, et ***non auparavant***. Comme on l'a dit, la réponse à la question peut être abordée dans le modèle ou dans le système : il est nécessaire d'évaluer la possibilité et l'intérêt du choix à faire.

Dans le modèle il faudrait, en l'associant aux propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication, savoir que tout nombre entier non nul est régulier pour la multiplication[4] : avec $b \neq 0$, si $bq = a,$ alors quel que soit $c \neq 0$: $cbq = ca$. Donc $q = \frac{ca}{cb}$, d'où : $q = \frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$.
Ces connaissances de nature algébrique n'étant pas disponibles chez les élèves de ce niveau, à moins que le professeur décide de leur imposer ce résultat sans plus de justification, nous ne pouvons emprunter cette voie. Bien que la version 2020 du programme du cycle 4 indique, dans un encadré intitulé *comparaisons des nombres*, « Égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) », nous ne suivrons donc pas cette possibilité pour les raisons évoquées ci-dessus ; des compléments à la 6^{e} séquence explicitent plus en détail la raison de ce choix.

Il n'y a plus alors qu'à suivre une voie qui consiste à revenir au système antérieurement étudié ; d'autant plus que le travail dans le système antérieur permet d'obtenir des connaissances nouvelles relatives au modèle en cours de construction. On peut choisir le système constitué des longueurs des bandes de papier et lui poser des questions. Par exemple, comment comparer et calculer lorsque des longueurs de bandes de papier sont exprimées à l'aide de fractions de dénominateurs différents ? Une fois le constat établi que, dans le cas de dénominateurs différents, on se heurte à un nouveau problème, l'élaboration de la réponse à cette question de recherche consiste à partir des connaissances précédemment obtenues : pourrait-on se servir de ce que l'on sait concernant comparaison, addition et soustraction, ***lorsque les dénominateurs sont les mêmes ?***

Confronté, par exemple, à l'addition de deux longueurs dont les mesures dans une unité de longueur sont écrites sous forme de fractions de dénominateurs différents, la question qui se pose consiste donc à trouver des mesures de ces longueurs écrites sous forme de fractions de même dénominateur. La réponse à cette question passe par un changement d'unité de longueur, ce qui sera peut-être le moment le plus délicat en l'absence de la notion de PPCM.

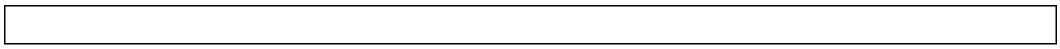
[4] La régularité de tout élément non nul pour la multiplication est établie dans un PER ultérieur, lorsqu'on en a vraiment besoin en 4^{e}, et qui est relatif aux équations. On s'appuie pour cela sur au moins trois propriétés vues comme axiomes : la définition de l'égalité, le fait que 0 est absorbant pour ×, et la distributivité de × par rapport à la soustraction. On a en effet : $a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow (a - b) \times c = 0 \Leftrightarrow ac - bc = 0 \Leftrightarrow ac = bc$. Il en va de même pour $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$, moyennant une légère modification technique : $a - b + c - c = 0$.

Deux voies sont suggérées et sont ci-dessous à la disposition des professeurs. A eux de choisir celle qui permettra la réalisation d'un engagement effectif des élèves dans l'élaboration de la technique et de sa justification.

6.2. Première voie : comparaison et soustraction pour parvenir à l'addition

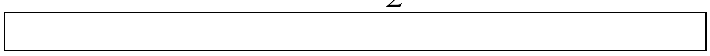
On donne aux élèves plusieurs échantillons de trois bandes de papier : l'une ayant pour longueur la longueur-unité notée L, les autres étant nommées *bande 1* et *bande 2*. ***On ne note aucun repère sur ces bandes qui faciliterait les mesurages***.

Question génératrice : quelles sont les mesures des longueurs des bandes 1 et 2 lorsque l'unité de longueur est L (les élèves ne connaissent évidemment pas les longueurs des bandes 1 et 2) ?



bande-unité de longueur L

bande 1 (de longueur $\frac{1}{2}L$) notée B_1



bande 2 (de longueur $\frac{2}{3}L$) notée B_2

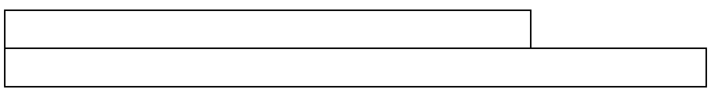
Les élèves peuvent utiliser plusieurs techniques. Par exemple, ils peuvent reporter la bande 1 dans la bande de longueur-unité et constater qu'il en faut 2. D'où la longueur $\frac{1}{2}L$ pour la bande 1.

La mesure de la bande 2 est plus délicate. Des élèves se souvenant de ce qui a été fait lors de la séquence 3 sur le rapport des grandeurs, peuvent encore utiliser la commensuration et constater que $3 \times$ longueur $B_2 = 2 \times L$. D'où la longueur de B_2 est $\frac{2}{3}L$. Ils peuvent aussi utiliser des pliages : en partageant la bande de longueur-unité L en 3, alors il faut 2 parts pour obtenir une longueur égale à la longueur de B_2. D'où la réponse $\frac{2}{3}L$.

Si cette phase apparaît trop longue, le professeur peut donner la mesure $\frac{2}{3}L$ de B_2.

Question génératrice : On veut comparer les longueurs de ces deux bandes. De combien l'une est-elle plus grande que l'autre ?

Les élèves répondent, évidemment, que B_2 est plus longue que B_1. On demande d'expliquer comment faire pour prouver ce résultat. La réponse attendue, triviale, est celle qui énonce que l'on met l'une des bandes sous l'autre :



On en conclut que $\frac{2}{3}L > \frac{1}{2}L$, ce que le professeur note au tableau. Il demande ce qu'on peut en conclure si on oubliait les grandeurs pour ne se consacrer qu'aux mesures. On attend $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

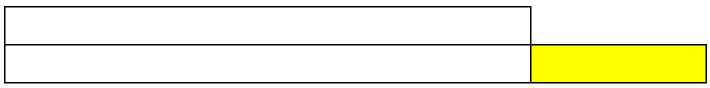
.

On continue à établir des propriétés sur les fractions abstraites à partir des propriétés trouvées sur les fractions de grandeur. Ces dernières servent de justification aux propriétés relatives aux fractions abstraites.

La justification tient au fait que la longueur-unité L qui permet de mesurer B_1 et B_2 est la même. Il s'en suit que les mesures $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ avec cette même unité sont dans cet ordre $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

La question se précise et devient question cruciale : de combien la bande 2 est-elle plus grande que la bande 1 ? Autrement dit, de combien $\frac{2}{3}L$ surpasse-t-il $\frac{1}{2}L$?

Les élèves vont répondre « d'un petit bout » qui dépasse. Comment appelle-t-on en mathématiques, cette longueur du « bout qui dépasse » que l'on colorie d'une couleur permettant de l'identifier ? On attend le terme « différence ». Le professeur fait noter qu'il s'agit de ***la différence*** ; ce que l'on écrit : $\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L$.



Une remarque importante est à faire à ce moment et doit être institutionnalisée ; c'est un point d'étape dans le travail mené :

On ne sait pas calculer cette différence parce que les dénominateurs sont différents, contrairement à ce qui a été étudié en 6^e où l'on savait, par exemple, que $\frac{2}{3}L - \frac{1}{3}L = \frac{2-1}{3}L = \frac{1}{3}L$. Cette technique de calcul n'est pas possible avec $\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L$.

Deux possibilités apparaissent : soit on replie ce bout, soit on le découpe pour le comparer aux autres longueurs des bandes. La deuxième solution permet des « transports » de ce bout de bande.

Si on le compare à la bande de longueur $\frac{1}{2}L$, il en faut 3 ; ce n'est pas la peine d'évoquer la division. En le comparant à la bande de longueur $\frac{2}{3}L$, il en faut 4 ; même remarque.

Question cruciale : à quoi est égale cette différence, ou encore, combien mesure la partie de la bande qui correspond à la différence des longueurs des deux bandes ?

Remarques :

- *Cette question peut arriver plus tôt, dès qu'a été écrite l'expression de la différence :* $\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L$

- *Il est possible que l'écriture ostensive de la différence ($\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L$) amène les élèves à dire que l'on trouverait immédiatement la réponse si les dénominateurs étaient égaux, et à se lancer dans une recherche afin de les rendre égaux.*
- *A la suite de la remarque précédente, il est possible que des élèves aient antérieurement appris comment réduire deux fractions au même dénominateur. Dans ce cas, le professeur valide leur réponse et leur demande de **justifier** cette technique sur l'exemple $\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L$.*

Dans tous les cas, c'est l'expérience en classe, les réactions des élèves, qui trancheront pour ce qui concerne ces deux remarques.

Pour répondre à la question cruciale en restant dans le système des longueurs de bandes, il faut transporter « un certain nombre de fois » le petit bout jaune dans la bande de longueur L. On trouve qu'il en faut 6. Conclusion la longueur de cette différence est $\frac{1}{6}L$.

On a donc trouvé que : $\boldsymbol{\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L = \frac{1}{6}L}$.

Nouvelle question cruciale : Pourrait-on écrire les longueurs des deux bandes à l'aide de la longueur du morceau de bande jaune qui est $\frac{1}{6}L$?

Cette question s'appuie sur l'idée, qui n'a pas été oubliée, et qui consiste, si cela est possible, à exprimer la longueur de B_1 qui est $\frac{1}{2}L$, et la longueur de B_2 qui est $\frac{2}{3}L$, grâce à des fractions de même dénominateur.

***Remarque** : faisant cela, on effectue un changement d'unité : l'unité n'est plus L mais $\frac{1}{6}L$. Cette technique est promise à un certain avenir, notamment lorsqu'il faudra enseigner des conversions d'unités.*

On revient à ce que l'on a observé précédemment en transportant le bout de bande jaune :

- il faut 3 bouts de bande jaune pour B_1 de longueur $\frac{1}{2}L$; donc $3 \times \frac{1}{6}L = \frac{3}{6}L$. Ce qui signifie que la longueur de B_1 qui mesure $\frac{1}{2}$ si L est la longueur-unité, mesure 3 si $\frac{1}{6}L$ est la nouvelle longueur-unité.
- il faut 4 bouts de bande jaune pour B_2 de longueur $\frac{2}{3}L$; donc $4 \times \frac{1}{6}L = \frac{4}{6}L$. Ce qui signifie que la longueur de B_2 qui mesure $\frac{2}{3}$ si L est la longueur-unité, mesure 4 si $\frac{1}{6}L$ est la nouvelle longueur-unité.

Comme les longueurs des bandes B_1 et B_2 n'ont pas changé, on a donc :

$\frac{1}{2}L = \frac{3}{6}L$ et $\frac{2}{3}L = \frac{4}{6}L$.

Question cruciale : peut-on expliquer pourquoi ces égalités et comment faire dans d'autres cas ; par exemple si on avait eu à effectuer une soustraction entre $\frac{1}{2}L$ et $\frac{2}{5}L$?

Remarque :

Ce travail peut être demandé hors classe, en précisant ce que l'on attend des élèves. Il s'agit, avec les nouvelles longueurs, de dessiner trois segments de longueur L, $\frac{1}{2}L$ et $\frac{2}{5}L$. Puis de déterminer la longueur de la différence entre le plus long et le plus court. Pour cela, déterminer la longueur du bout de segment qui correspond à cette différence, et enfin écrire à quoi sont égales les longueurs $\frac{1}{2}L$ et $\frac{2}{5}L$ avec des fractions de même dénominateur.

Pour réaliser ce travail, on peut donner à tous les élèves une feuille quadrillée sur laquelle a été dessiné un segment de longueur 10, sans donner cette longueur ; le quadrillage l'indiquera aux élèves lorsqu'ils en auront besoin.

On attend des élèves la construction suivante :

Pour cela, ils ont dû subdiviser le segment de longueur L : cela est simple pour obtenir le segment de longueur $\frac{1}{2}L$, mais nécessite de recourir aux graduations en dixièmes pour obtenir celui de longueur $\frac{2}{5}L$ (= $\frac{4}{10}L$), en comptant chaque fois deux dixièmes pour un cinquième.

D'où $\frac{1}{2}L = \frac{5}{10}L$ *et* $\frac{2}{5}L = \frac{4}{10}L$.

A l'issue de ce travail dans le système, les élèves doivent parvenir à écrire :

$\frac{1}{2}L - \frac{2}{5}L = \frac{1}{10}L$ *; au mieux, et ce sera le travail du professeur si ce n'est pas le cas :*

$\frac{5}{10}L - \frac{4}{10}L = \frac{1}{10}L$.

On peut demander d'expliquer pourquoi les dixièmes de L.

La réponse attendue est celle qui repose sur le changement d'unité : au lieu de prendre L comme longueur unité, on a pris $\frac{1}{10}$*L. Ainsi le segment de longueur* $\frac{1}{2}$ *si L est l'unité, mesure 5 si* $\frac{1}{10}$*L est l'unité : donc* $\frac{5}{10}$*L. De même, le segment de longueur* $\frac{2}{5}$ *si L est l'unité, mesure 4 si* $\frac{1}{10}$*L est l'unité : donc* $\frac{4}{10}$*L.*

On peut faire verbaliser le raisonnement et le travailler oralement en l'appuyant sur la figure quadrillée de la construction dont on montre à quoi correspondent les différentes parties du raisonnement ci-dessous :

- *pour obtenir des dixièmes à partir de demis, il a fallu les subdiviser en cinq ; donc pour conserver la même longueur, il faut multiplier par cinq les longueurs exprimées en demis :* $\frac{1}{2}L = 5\times\frac{1}{5\times 2}L = \frac{5\times 1}{5\times 2}L$.
- *pour obtenir des dixièmes à partir de cinquièmes, il a fallu les subdiviser en deux ; donc pour conserver la même longueur, il faut multiplier par deux les longueurs exprimées en cinquièmes :* $\frac{2}{5}L = 2\times\frac{2}{2\times 5}L = \frac{2\times 2}{2\times 5}L$.

Arrivés en ce point, après avoir fait travailler les élèves en classe sur $\boldsymbol{\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L = \frac{1}{6}L}$ et sur $\frac{1}{2}L - \frac{2}{5}L = \frac{1}{10}L$, on peut demander de calculer : $\frac{2}{3}L+\frac{1}{2}L$; $\frac{2}{3}L+\frac{1}{6}L$; $\frac{1}{2}L-\frac{1}{6}L$; $\frac{1}{2}L+\frac{2}{5}L$; $\frac{2}{5}L+\frac{1}{10}L$; $\frac{2}{5}L-\frac{1}{10}L$; $\frac{1}{2}L-\frac{1}{10}L\ldots$

*Pour s'aider dans les calculs, les élèves peuvent travailler sur les bandes et sur la feuille quadrillée : soit donc **sur le système**. Progressivement, le travail technique portant sur les calculs qui précèdent montre que l'on peut s'engager dans des techniques plus économiques. D'une part, les calculs restent vrais quelle que soit la grandeur ; on ne travaille donc que sur les mesures fractionnaires et on peut se passer de l'écriture de la grandeur, dans ce cas une longueur L.*
D'autre part, il apparaît que l'obtention nécessaire d'un dénominateur commun est réalisée en multipliant entre eux les dénominateurs ; cela nécessite de multiplier le numérateur de chaque fraction par le même nombre que l'on a multiplié son dénominateur.

*Il s'agit désormais d'un travail **dans le modèle** ; lorsqu'on veut vérifier que l'on ne se trompe pas dans la technique, on peut **revenir au système** dont elle est issue.*

On peut désormais travailler la technique avant une institutionnalisation, en multipliant les exercices :

Calculer : $\frac{7}{4}+\frac{2}{3};\frac{7}{4}-\frac{2}{3};\frac{6}{5}+\frac{3}{4};\frac{2}{7}+\frac{1}{2};\frac{7}{8}-\frac{2}{3}\ldots$

Comparer : $\frac{7}{4}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{5}$; $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{2}$ ...

Institutionnalisation

Pour ajouter, soustraire ou comparer deux fractions de dénominateurs différents, il faut les écrire ***avec le même dénominateur***.
Pour trouver un dénominateur commun, on ***multiplie entre eux les dénominateurs.***
On doit alors multiplier chaque numérateur par le dénominateur de l'autre ; sinon, on n'obtient pas une fraction égale à la précédente.

Exemple : Calculer $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=\frac{4\times5}{3\times5}+\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{20}{15}+\frac{6}{15}=\frac{26}{15}$

On a aussi : $\frac{20}{15}>\frac{6}{15}$, donc $\frac{4}{3}>\frac{2}{5}$

et $\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4\times5}{3\times5}-\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{20}{15}-\frac{6}{15}=\frac{14}{15}$

Remarque : si on connaît les opérations sur les nombres relatifs, on peut faire calculer, par exemple : $\frac{2}{5}-\frac{4}{3}=\frac{6}{15}-\frac{20}{15}=-\frac{14}{15}$, etc.

6.3. Deuxième voie concernant l'addition de fractions de dénominateurs différents

6.3.1. Préambule

*Il faut ici rappeler ici quelques points essentiels. Ils concernent l'enseignement des fractions à l'école primaire et au collège, à la fois dans le **Curriculum Institutionnellement Offert (CIO)** et dans le **Curriculum Personnellement Vécu (CPV)** le plus souvent par les élèves, tel qu'on peut les extrapoler à partir de divers documents, notamment les programmes et manuels. Pour ce qui concerne le CIO voici ce qu'en disant les repères de progressivité datant de 2019 :*

1. *En CM1 :*

> Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1.
> Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.

2. *En CM2 :*

> Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.

Il est explicite que « la fraction dans le cadre de partage de grandeurs » sert de situation de départ pour cet enseignement, au moins dans un premier temps. Le reste du programme ne mentionne plus les grandeurs. On passe donc très vite, dès la période 2 du CM1 c'est-à-dire au bout d'un seul trimestre, aux « fractions nombres » qui ne sont plus « des partages de grandeurs », ainsi qu'à l'addition des fractions décimales de même dénominateur, et à leurs *décompositions en la somme d'une partie entière et d'une fraction inférieure à 1. Dès la période 2 du CM1, c'est-à-dire au début du 2e trimestre, les élèves sont confrontés au modèle de l'addition des fractions, sans la rapporter aux grandeurs. En CM2, l'addition des fractions sert de prétexte pour justifier l'existence de la partie décimale d'un nombre grâce à une fraction décimale, bien que les raisons d'être du système décimal fassent ici défaut.*

6.3.2. Remarques préliminaires sur le Curriculum Institutionnellement Offert (CIO) par ce PER

En 6e, le PER sur les fractions permet de rencontrer, d'expérimenter et de modéliser l'usage des fractions de grandeurs à travers les six points suivants :

1) Les élèves rencontrent et expérimentent que si $u = \frac{1}{2}L$ alors $1L = 2u$; donc $2L = 4u$, $3L = 6u$, etc. D'où découle la proportionnalité entre deux grandeurs de même espèce, dès que l'une est fraction de l'autre, ou encore, dans le seul cas où le rapport est un rationnel positif, dans le cas où les grandeurs sont commensurables.
2) Les élèves ont expérimenté que si $u = \frac{1}{2}L$ et $v = \frac{1}{3}L$ alors $u > v$ car $2 < 3$.
3) Les élèves ont été en contact avec les deux interprétations de l'expression $u = \frac{1}{2}L$.
   a. $u = \frac{1}{2}L$ signifie que u mesure $\frac{1}{2}$ si l'unité est L.
   b. $u = \frac{1}{2}L$ signifie que u mesure « un » si l'unité est « le demi de L »
4) Ils ont dû, par la pratique et à plusieurs reprises, vérifier l'axiome suivant : quand on additionne deux fractions d'une même grandeur, on obtient une fraction de celle-ci.
5) Ils ont fait un usage technique de $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
6) Pour cela, ils ont dû utiliser le point 3b ; le seul qui permette de donner du sens à l'addition de deux fractions ayant le même dénominateur. Ainsi le CIO a organisé la rencontre des élèves avec le fait que si $u = \frac{1}{2}L$ et $v = \frac{1}{3}L$, l'unité de u n'est pas la même que l'unité de v, et donc le modèle du point 5 ci-dessus n'est pas utilisable.

6.3.3. Question génératrice : Soit $u = \frac{1}{2}L$ et $v = \frac{1}{3}L$. Comment connaître la somme $u + v$?

Une étude a priori qui se subdivise et deux options possibles

Ci-dessous, l'analyse de l'organisation didactique, c'est-à-dire des fonctions assignées au professeur et aux élèves, n'est qu'ébauchée.

6.3.3.1. Première possibilité utilisant l'option 3)b) pour calculer u + v

Deux remarques peuvent être faites à partir de « l'examen » de $u + v = \frac{1}{2}L + \frac{1}{3}L$.

Ce doit être une fraction de L (point 4 ci-dessus) et cette fraction de L contenant des « demis » et des « tiers de L », L doit donc pouvoir être partagée en « demis » et en « tiers ».

La question qui se pose est la suivante : comment vit dans la classe le fait que l'on doive ou puisse se ramener à des fractions de même dénominateur afin de pouvoir les ajouter ? Il semble que l'arrivée de cette question doive être davantage prise en compte, aménagée. C'est précisément ce que fait la voie 1 en commençant par un travail sur la différence des longueurs de bandes, qui fait « naturellement » apparaître des sixièmes. Evidemment, dans le cas de la voie 1, on doit faire apparaître une bande de longueur L pour que les sixièmes apparaissent ; mais c'est la seule contrainte didactique. La question suivante semble un peu « téléguider » la réponse 6.

Question : Quel est le plus petit nombre qui peut être divisé facilement en « demis » et en « tiers » ?

Réponse : 6

Conséquence : Il est donc possible d'obtenir des « demis » et des « tiers » si une grandeur peut être divisée en « sixièmes ».

Or, les « sixièmes de L » sont forcément plus petits que les « demis de L » ou que les « tiers de L » ! Donc il est peut-être possible de déterminer combien de « sixièmes de L » on peut mettre dans « un « demi de L » ou dans un « tiers de L ».

Soit donc à résoudre les questions suivantes :

a) $\frac{1}{2}L = \frac{\cdots}{6}L$. Cette égalité peut être résolue expérimentalement avec des plaques imprimées en 3D. Mais on peut aussi penser à $u = \frac{1}{2}L$ qui implique $1L = 2u$; donc $2L = 4u$, $3L = 6u$, etc., (point 1 des remarques préliminaires). Cette dernière égalité revenant à dire que $u = \frac{3}{6}L$. Et comme $u = \frac{1}{2}L$, il vient : $u = \frac{1}{2}L = \frac{3}{6}L$.

b) De la même manière, on obtient : $v = \frac{1}{3}L = \frac{2}{6}L$ puisque si $v = \frac{1}{3}L$ alors $3v = 1L$ et donc $6v = 2L$, d'où l'on déduit $v = \frac{2}{6}L$

Finalement, on en déduit : $\frac{1}{2}L + \frac{1}{3}L = \frac{3}{6}L + \frac{2}{6}L = \frac{3+2}{6}L = \frac{5}{6}L$

Cette technique peut être travaillée en tant que telle avec d'autres fractions, en écrivant pour cela tout le raisonnement, jusqu'à ce que les élèves s'aperçoivent que l'on pourrait procéder plus économiquement. On aboutit alors à $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$, qui peut être considérée comme le modèle de la pratique qui lui a donné naissance.

6.3.3.2. Deuxième possibilité pour le calcul u + v, utilisant l'option 3)a)

Comme $u = \frac{1}{2}L$ et $v = \frac{1}{3}L$ alors $u + v = \frac{1}{2}L + \frac{1}{3}L = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})L$, obtenue par analogie avec l'addition des fractions ayant même dénominateur, sans pour autant que les élèves aient la preuve que cette « *extension praxémique* » soit justifiée et donc possible.

Il n'y a malheureusement rien, dans ce qui précède cette section du PER, qui permette de justifier cette écriture. En effet, l'expression numérique ($\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$) ne peut pas être interprétée à partir des connaissances énoncées dans les remarques préliminaires puisqu'il s'agit d'une expression numérique et non d'une fraction de grandeur. L'expression numérique $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ ne paraît pas pouvoir être réduite sans l'utilisation de la technique $\frac{a}{b}=\frac{a\times n}{b\times n}$. Or, cette dernière ne peut être prouvée sans recourir à des expressions équivalentes modélisant une grandeur, l'une étant une fraction d'une autre, c'est-à-dire par l'option 3)b).

Bilan concernant ces deux possibilités

Il semble que seule l'approche 3)b) puisse être utilisée car, contrairement à l'autre, elle est justifiée à l'aide d'éléments d'organisations mathématiques rencontrées jusque-là dans le PER.

6.6.4. Remarques : De l'enseignement traditionnel à celui par PER

Dans le système actuel, à la fin de l'année de 6e, les élèves doivent choisir une langue vivante supplémentaire, et le plus souvent, les classes de 5e sont formées sur la base de ces choix de langues. Les classes de 6e sont donc remaniées, et les élèves de toutes les 6e, sauf options particulières comme les classes bilingues ou les classes CHAM, sont mélangés de manière quasi aléatoire.

Si l'on suppose qu'une classe de 6e, ou deux, ont été enseignées par PER sur le thème des fractions, les élèves de ces deux classes se retrouvent avec des élèves qui auront été enseignés différemment sur ce thème des fractions. Comment, dans ces conditions, continuer à enseigner par PER en 5e ? Ou plutôt : **quels sont les savoirs minimum, issus du PER Fractions, qui pourraient suffire pour continuer au mieux le PER en 5e, avec des élèves qui n'ont pas été enseignés à partir de ce PER en 6e ?** En 5e, le programme officiel stipule que l'addition de fractions ayant des dénominateurs différents est à étudier.

> La conception d'une fraction en tant que nombre, déjà abordée en sixième, est consolidée. Les élèves sont amenés à reconnaître et à produire des fractions égales (sans privilégier de méthode en particulier), à comparer, additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.

La voie 2 demande que les fractions de grandeur équivalentes soient connues des élèves qui arrivent en 5e. Or, c'est effectivement le cas, en dehors du fait que les fractions équivalentes sont rencontrées à partir de la fraction partage, et non à partir de la mesure d'une même grandeur. Il en est de même pour la relation $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ à laquelle les élèves enseignés de manière traditionnelle ont pu établir un certain rapport. ***Il faut donc accepter de perdre du temps et revenir au PER fractions de 6e, jusqu'à la mise en évidence que si u= $\frac{1}{2}L$ alors 1L = 2u ; donc 2L = 4u, 3L = 6u, etc. (qui donnent à leur tour u = $\frac{2}{4}L$, u = $\frac{3}{6}L$, etc.) et jusqu'à montrer que si u= $\frac{1}{2}L$, si u = $\frac{2}{4}L$ et si u = $\frac{3}{6}L$, comme il s'agit des mêmes longueurs u et des mêmes longueurs L dans ces expressions, alors on peut généraliser l'étude de ce système par le modèle numérique n'évoquant que les mesures : $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$. Tout comme le***

modèle $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ ***qui aura alors retrouvé tout son sens comme modèle de somme de plusieurs fractions ayant le même dénominateur.***

A partir de ce point, la ***1re voie : comparaison et soustraction pour parvenir à l'addition*** sera *a priori* pleinement accessible à des élèves enseignés par les fractions partages : les fractions de grandeurs auront donné du sens aux écritures fractionnaires équivalentes ainsi qu'à la somme, la comparaison et la différence de fractions de même dénominateur.

7^{e} séquence : la multiplication des fractions

De nombreux compléments concernant cette séquence se trouvent à la fin de l'ensemble des séquences de ce texte, dans la partie intitulée « Compléments et remarques sur certains passages des séquences ». ***Les compléments, assez longs, à la 7^{e} séquence discutent et évaluent diverses manières d'enseigner le produit des fractions. La conclusion de cette discussion aboutit à un choix pour ce PER. Le lecteur peut, s'il le souhaite, sauter cette lecture. Ce faisant si la proposition contenue dans ce PER lui paraît à la fois proche et éloignée des propositions des manuels, il doit garder à l'esprit que la raison tient aux choix raisonnés auxquels conduit l'analyse figurant dans ces compléments.***

7.1. Cadrage mathématique et didactique

Nous citons ci-dessous, et sommairement, trois des difficultés qui, non envisagées *a priori*, conduisent les élèves vers des erreurs et confusions à propos des fractions et de leur produit.

1. Tout d'abord, avec le produit des fractions, on engage les élèves dans une démarche nouvelle : le passage d'un travail jusqu'alors essentiellement conduit sur des grandeurs de dimension 1 pour l'addition, la soustraction, la comparaison, la multiplication par un scalaire entier, à un travail sur des grandeurs de dimension 2. Ce travail étant mené ***à partir*** des grandeurs de dimension 1, la distinction à faire entre les dimensions des grandeurs en jeu doit être éprouvée par les élèves.

2. Puis, le travail sur les grandeurs de dimension 2, lorsque les grandeurs ne sont pas « oubliées » comme c'est le cas de la plupart des manuels dès la dimension 1, importe, avec des difficultés mathématiques, des difficultés didactiques. Il est donc nécessaire, en tant qu'indication de la justification de la technique permettant le calcul du produit, de conserver l'écriture en dimension 2 ; soit si u est l'unité d'une grandeur de dimension 1 d'écrire le produit avec u^2 comme unité.

3. Enfin, il est nécessaire de tenir compte des rapports aux fractions antérieurement établis par les élèves à partir de l'enseignement qui leur a été délivré. Ce que proposent nombre des manuels postérieurs à la réforme de 1971 et que l'on retrouve dans les classes, contient des erreurs et confusions mathématiques. Parmi les plus fréquentes, l'oubli des grandeurs et de leurs mesures conduit à parler non pas de fraction de grandeur mais de « fraction d'objet » ; ce qui n'a pas de sens et dont nous nous démarquons tout au long de ce PER dès la classe de 6^{e}. Les organisations didactiques en vigueur depuis une quarantaine d'années, sous la forme majoritaire de l'ostension déguisée, bâties autour d'activités aux mathématiques évanescentes mais laissant croire aux élèves qu'ils les construisent par leur travail, tentent de masquer les difficultés inhérentes à la notion de fraction. Les professeurs s'en aperçoivent sans en connaître forcément la cause, soit à l'issue d'évaluations formelles, soit lorsque des notions nouvelles à enseigner sollicitent des rapports aux fractions qui, après-coup, se révèlent erronés chez leurs élèves. Dans nos propositions, nous souhaitons rompre avec l'ostension déguisée et engager les élèves dans l'étude par la recherche sous la direction du professeur. Ce choix pour le produit, comme pour les notions et opérations qui précèdent, aboutit à une proposition qui, tant aux plans des organisations mathématiques que didactiques, n'a pas grand-chose en commun avec les activités trouvées dans des médias – manuels, Internet, etc. –, quoi qu'on puisse en penser lors d'une lecture rapide.

7.2. Le produit de mesures fractionnaires de longueurs comme mesure d'aires de rectangles : construction de la technique et généralisation

*Comme indiqué dans le cartouche en tête du texte de cette séquence, les raisons qui ont conduit à choisir, pour le calcul du produit, la voie utilisant **l'aire du rectangle** se trouvent analysées et justifiées dans la partie relative aux compléments.*
On recourt à la recherche par les élèves de plusieurs tâches du même type afin d'admettre ensuite une généralisation de la technique trouvée : tout d'abord dans le cas des fractions concrètes, associées à la mesure des longueurs et des aires, puis en l'étendant aux fractions abstraites.
Comme les fractions irréductibles sur lesquelles on fait travailler les élèves ont pour dénominateurs 2, 3, ou 5, on peut choisir pour longueur du côté du carré-unité leur ppcm, dans ce cas un carré de côté 30 mm ou, pour une figure plus grande, de longueur le double 60 mm. Les élèves peuvent, avec ces longueurs, utiliser la règle graduée pour subdiviser les longueurs des côtés en demis, tiers ou cinquièmes. La longueur du côté du carré est désignée par l, sans que sa longueur en mm ou cm soit donnée.

La question ci-dessous est donnée oralement puis notée au tableau :

Question génératrice : La somme et la différence de mesures fractionnaires de longueurs permettent notamment de calculer des longueurs de segments. A quelle mesure de grandeur peut correspondre leur produit, et comment alors calculer un tel produit de fractions ?

Il est possible que des élèves donnent diverses réponses vraies ou fausses qu'il faut alors trier, ou encore aucune.

On donne alors deux segments de longueurs $2u$ et $3u$.

u $2u$ $3u$

Question cruciale : oubliant quelques temps les mesures fractionnaires, à quoi est égal le produit 2u × 3u, et à la mesure de quelle grandeur peut-il correspondre ? Peut-on dessiner une figure qui aura cette grandeur pour mesure ?

Il y a des chances que les élèves donnent la réponse $6u$ et disent que la figure qui représente ce produit est un segment de longueur $6u$. Ce à quoi le professeur fait remarquer qu'on sait depuis longtemps que la longueur $6u$ est obtenue en additionnant deux longueurs $3u$, ce qui s'écrit $3u + 3u$ ou encore $2 \times 3u$. Ce produit n'est donc pas le produit $2u \times 3u$ demandé.

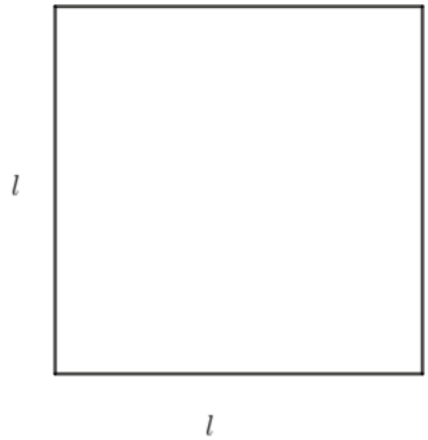
A ce stade, il est possible que certains élèves se souviennent que si les longueurs étaient plutôt 2cm et 3cm et non pas $2u$ et $3u$, alors le produit 2cm × 3cm serait la mesure $6cm^2$ de l'aire d'un rectangle…

Ainsi a-t-on la réponse à la question posée : le produit $2u \times 3u$ correspond à la mesure $6u^2$ de l'aire d'un rectangle dont la longueur est $3u$ et la largeur $2u$, que l'on peut dessiner si on le souhaite. Ce que l'on fait écrire au cours d'une institutionnalisation locale :

Institutionnalisation locale : u étant une unité de longueur, le produit $2u \times 3u$ correspond à la mesure $6u^2$ de l'aire d'un rectangle de dimensions $3u$ et $2u$.

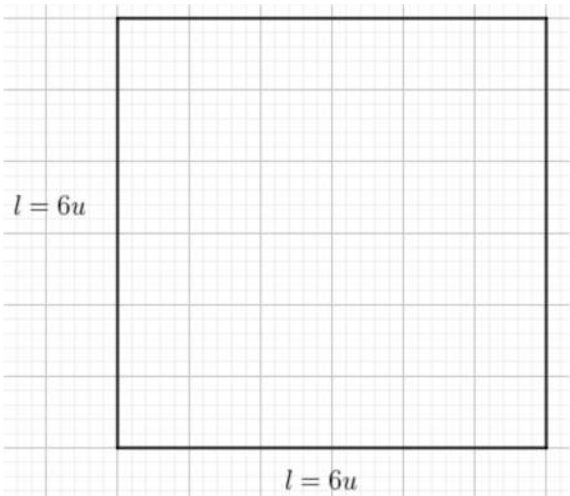
7.2.1. (Nouvelle ?) première rencontre avec une unité d'aire

On considère un carré de côté ayant pour longueur l. Comment écrire la mesure de son aire ?



Les élèves savent, parce que cela leur a été enseigné dans les classes précédentes et que l'on vient de s'en servir pour répondre à la question précédente, que l'aire d'un carré est égale au produit du côté par lui-même : $l \times l = l^2$. La réponse $4 \times l$, qui signe la confusion avec le périmètre, sera sans doute écartée très vite par des élèves si d'autres la proposent. On attend des élèves qu'ils demandent à quoi est égale la longueur l, car sinon on ne peut obtenir une mesure de l'aire du carré.

Si on connaissait la mesure de la longueur l, par exemple si $l = 6u$, connaîtrait-on la mesure de l'aire de ce carré ?

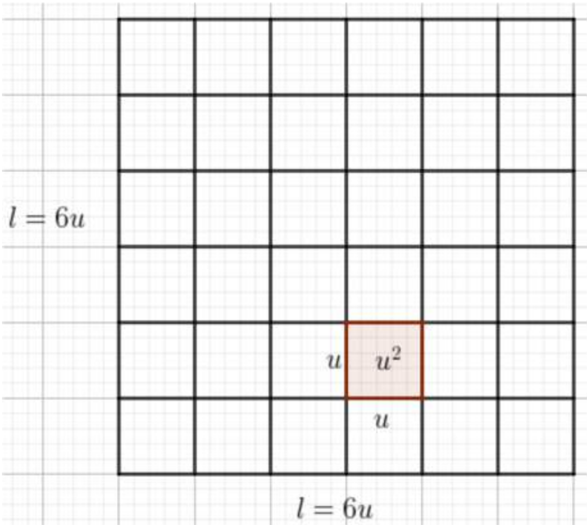


On s'attend à ce que les élèves répondent 36 ou $36u$, ou peut-être $36u^2$. Les élèves, entre eux, écartent de même la réponse $4 \times 6 = 24$ qui signe une confusion avec le périmètre.

S'ils répondent 36, la question devient celle de savoir quelle est l'unité : 36 quoi ?

S'ils répondent $36u$, la question devient celle de savoir si une aire peut être mesurée dans la même unité qu'une longueur.

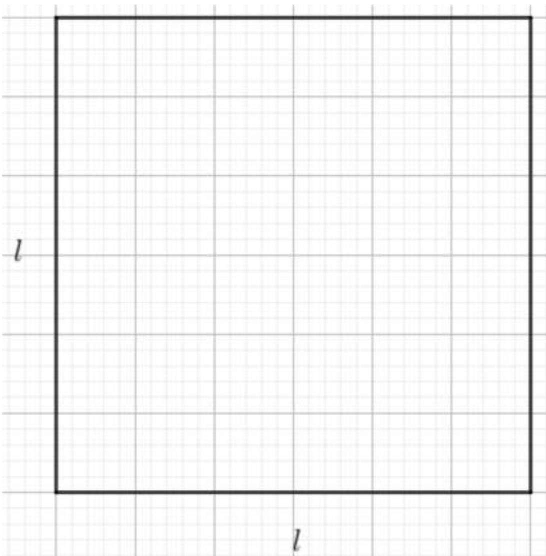
S'ils répondent $36u^2$, la question devient celle de savoir de quelle aire u^2 est-elle la mesure unité. La réponse attendue consiste à quadriller la surface du carré par des carrés de côtés ayant pour longueur u.



Institutionnalisation locale : un carré de côté $l = 6u$ a une aire qui mesure $l \times l = l^2 = 6u \times 6u = (6 \times 6) \times (u \times u) = 36u^2$. u^2 est l'aire-unité. Mais on peut choisir de prendre l'aire l^2 du carré pour aire-unité. Dans ce cas $u^2 = \dfrac{1}{36} l^2$.

7.2.2. Elaboration d'une technique pour l'aire de rectangles comme fractions de l'aire-unité d'un carré

La classe est organisée en groupes de quatre ou cinq élèves. Une feuille non quadrillée est distribuée à chaque élève ; la même dans chaque groupe. Y est dessiné un carré de longueur 6u. N'est seulement mentionnée que la longueur l, écrite en marge de deux des côtés du carré. Ci-dessous, le carré a été représenté sur fond quadrillé, cela peut aider dans un premier temps à la fabrication des feuilles non quadrillées, qui seront obtenues une fois que l'appui sur le quadrillage aura été enlevé.

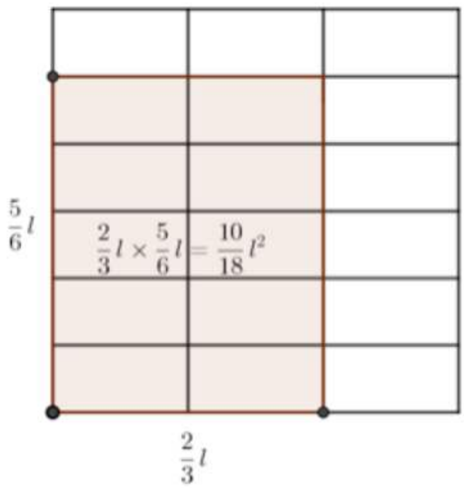


Chacun des groupes dispose de dimensions différentes pour les longueurs des côtés du rectangle qu'ils auront à y construire. Ils mesureront avec leurs règles graduées afin d'obtenir sur les côtés du carré les dimensions des différents rectangles ; chaque groupe ayant la même ***feuille non quadrillée*** *sur laquelle est dessiné* ***le même carré****. Dans un premier temps, les aires des rectangles sont inférieures à l'aire du carré : les rectangles seront donc, selon toute vraisemblance, dessinés par les élèves « à l'intérieur » du carré.*

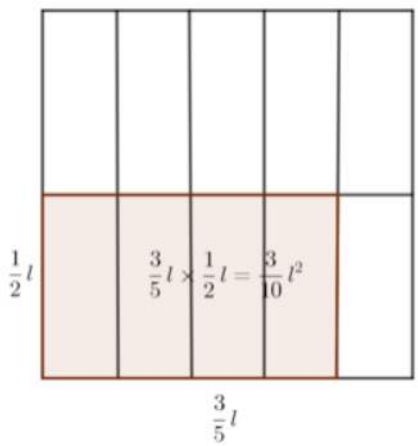
Question cruciale : quelle fraction de l'aire du carré dessiné sur la feuille représente l'aire d'un rectangle construit sur les côtés de ce carré, les longueurs des côtés du rectangle ayant pour mesures des fractions des mesures de celles du carré ?

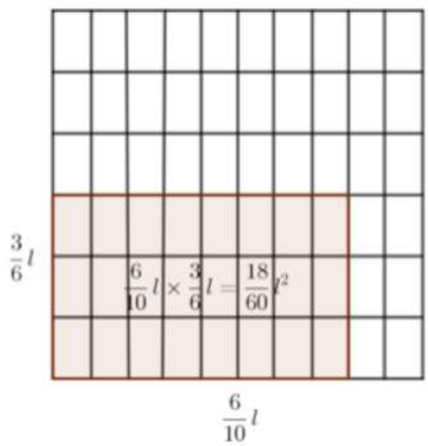
Si la classe est divisée en six groupes, on peut choisir de donner à chacun les couples de dimensions suivants : $\frac{2}{3}l$ et $\frac{5}{6}l$; $\frac{5}{6}l$ et $\frac{2}{5}l$; $\frac{3}{5}l$ et $\frac{1}{2}l$; $\frac{2}{6}l$ et $\frac{4}{5}l$; $\frac{2}{3}l$ et $\frac{2}{5}l$; $\frac{1}{3}l$ et $\frac{5}{6}l$.

On obtient par exemple, pour $\frac{2}{3}l$ et $\frac{5}{6}l$:



Il est intéressant de donner les mêmes dimensions à deux groupes différents, mais sous la forme de fractions équivalentes, les unes irréductibles et les autres pas. Par exemple pour un groupe $\frac{3}{5}l$ et $\frac{1}{2}l$, et pour un autre groupe $\frac{6}{10}l$ et $\frac{3}{6}l$.





On conclut que $\frac{3}{5}l \times \frac{1}{2}l = \frac{6}{10}l \times \frac{3}{6}l$. Pourquoi a-t-on l'égalité entre ces deux produits ? Ou encore : pourquoi $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{10} \times \frac{3}{6}$?

Après la recherche menée dans les différents groupes, l'idée commence à émerger que $\frac{a}{b}l \times \frac{c}{d}l = \frac{a \times c}{b \times d}l^2$ ou encore que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

On le note au tableau pour les différentes fractions utilisés dans les groupes.

Ainsi : $\frac{2}{3}l \times \frac{5}{6}l = \frac{2\times5}{3\times6}l^2$ $\quad\frac{5}{6}l \times \frac{2}{5}l = \frac{5\times2}{6\times5}l^2$ $\quad\frac{3}{5}l \times \frac{1}{2}l = \frac{3\times1}{5\times2}l^2$

$\frac{2}{6}l \times \frac{4}{5}l = \frac{2\times4}{6\times5}l^2$ $\quad\frac{2}{3}l \times \frac{2}{5}l = \frac{2\times2}{3\times5}l^2$ $\quad\frac{1}{3}l \times \frac{5}{6}l = \frac{1\times5}{3\times6}l^2$

Nouvelles questions cruciales :

- ***nous n'avons construit que des rectangles à l'intérieur du carré. Les aires des rectangles sont donc inférieures à l'aire l^2 du carré. Pouvait-on le prévoir à l'avance, sans avoir dessiné ces rectangles ?***
- ***quelles dimensions pourrait-on choisir pour dessiner des rectangles qui ne sont pas à l'intérieur du carré ?***

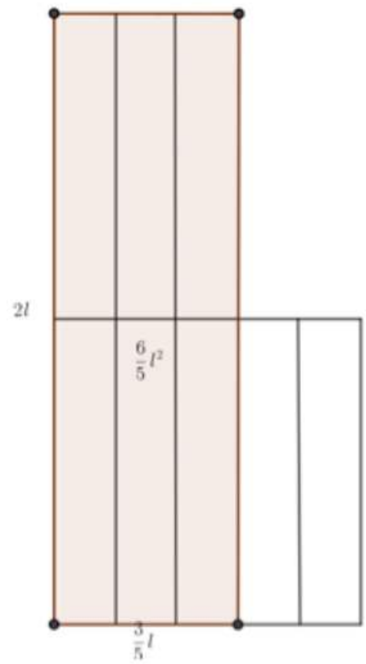
On s'attend à diverses réponses. Pour la première question, la réponse attendue consiste à ce que les élèves s'aperçoivent que les fractions sont inférieures à 1. Pour la seconde, la réponse consiste à « augmenter » les dimensions du rectangle, de manière à ce que l'une soit supérieure à *l*.

En triant les réponses données par les élèves, on peut conserver celles pour lesquelles l'une des dimensions est 2*l* ou 3*l*. Par exemple, pour le rectangle initial de dimensions $\frac{3}{5}l$ et $\frac{1}{2}l$, on pourrait prendre $\frac{3}{5}l$ et 2*l*. Le produit s'écrit donc $\frac{3}{5}l \times 2l$.

Sans dessiner le rectangle, à quelle réponse peut-on s'attendre pour ce produit ?

Il y a des chances que diverses réponses soient données, notamment : $\frac{6}{10}l^2$, $\frac{6}{5}l$ ou $\frac{6}{5}l^2$.

On vérifie sur une figure, des groupes travaillant sur $\frac{3}{5}l \times 2l$ et d'autres sur $2l \times \frac{3}{5}l$.



On peut faire remarquer qu'il était inutile de dessiner deux figures différentes pour vérifier l'égalité des produits puisqu'il suffit de « faire tourner » celle-ci pour obtenir $2l \times \frac{3}{5}l$.

Arrivés en ce point, il est temps d'institutionnaliser ce qui vient d'être travaillé et trouvé.

Institutionnalisation : le produit de deux grandeurs de dimension 1, par exemple les longueurs $\frac{a}{b}l$ ***et*** $\frac{c}{d}l$ ***que l'on note*** $\frac{a}{b}l \times \frac{c}{d}l$***, est égal à une grandeur de dimension 2, dans ce cas à l'aire*** $\frac{a \times c}{b \times d}l^2$***.***

Dans le cas général, si on ne s'intéresse qu'aux nombres $\frac{a}{b}$ ***et*** $\frac{c}{d}$ ***qui mesurent des grandeurs de dimensions 1 et 2, on a :*** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$***.***

7.2.3. Relation $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d} = \frac{a}{d} \times c$

Dans cette partie, le PER est inachevé dans le sens où rechercher cette relation, comme l'indique le R de PER, par une question génératrice dévolue aux élèves, et qui motive cette recherche, semble difficile.

Une question qui motive l'intérêt porté à cette relation est en effet d'ordre calculatoire. Elle paraît désormais relativement de peu d'intérêt lorsque, comme n'importe quel collégien, on dispose d'une calculatrice. Il pouvait être en effet plus simple, pour calculer $a \times \frac{c}{d}$*, de calculer tout d'abord* $\frac{a}{d} \times c$*, dans le cas où d est un diviseur de a, mais pas de c.*

Par exemple, soit à calculer $68 \times \frac{49}{17}$*. Si on sait que* $68 \times \frac{49}{17} = \frac{68}{17} \times 49$*, le calcul se fait facilement. On a :* $68 \times \frac{49}{17} = \frac{68}{17} \times 49 = 4 \times 49 = 4 \times (50-1) = 200 - 4 = 196$*. Mais un tel calcul demande une certaine virtuosité qui, alliée à une pratique du calcul mental, s'appuie sur la connaissance de certains nombres premiers, ceux inférieurs à 19 sur cet exemple, et sur l'usage adéquat de la distributivité.*

On peut se demander si ce type de calcul, qui avait du sens lorsqu'on ne disposait pas de calculatrice, n'apparaît pas purement gratuit de nos jours.

Or, conserver le sens à donner à la relation à établir, en raisonnant en terme de grandeur, nécessite de lire l'un des membres de l'égalité, $a \times \frac{c}{d}u$*, comme une* ***addition répétée*** *de la grandeur* $\frac{c}{d}u$*, et l'autre membre,* $\frac{a}{d} \times cu$*, comme* ***fraction*** *de la grandeur cu. Si l'on souhaite rester dans le cadre des grandeurs de dimension 2, et que l'on n'a pas établi la relation en 6^e, on est amené à poser directement la question aux élèves, sans plus d'autre raison valable que celle de suivre le programme…*

Avant de parvenir jusqu'à la question génératrice ci-dessous, on pourrait faire calculer des expressions du type $68 \times \frac{49}{17}$*, les élèves étant tentés de commencer par la simplification de* $\frac{49}{17}$ *qui est, hélas pour eux, irréductible. Par exemple :* $9 \times \frac{5}{3}$ *;* $14 \times \frac{8}{7}$ *;* $24 \times \frac{5}{6}$ *;… c'est-à-dire le produit d'un entier par une fraction irréductible dont le dénominateur est un diviseur de cet entier. Le début des calculs se fait « à la main » afin de buter sur la difficulté liée à la fraction irréductible. Puis on demande de faire faire ces calculs par la calculatrice qui donne des résultats entiers : 15 ; 16 ; 20 ; … La question qui surgit est celle portant sur l'explication de tels résultats que l'on n'avait pu obtenir par le calcul. Ce qui conduit à la formulation d'une conjecture sous la forme de la question génératrice suivante :*

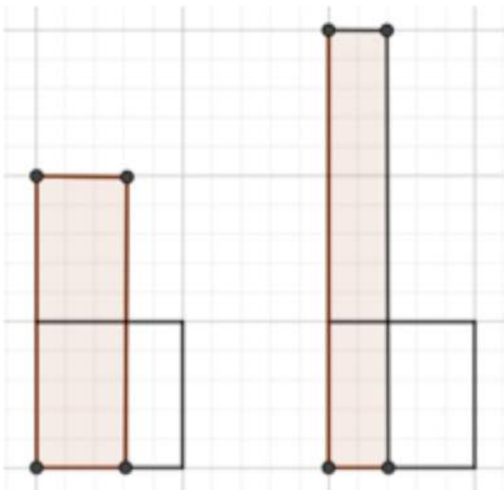
Question génératrice :

A-t-on : $au \times \frac{c}{d}u = \frac{a \times c}{d}u^2 = \frac{a}{d}u \times cu = \frac{a}{d} \times cu^2$ ***ou encore*** $\boldsymbol{a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d} = \frac{a}{d} \times c}$ *?*

1. Dans le cadre des grandeurs

La réponse est affirmative et a du sens en considérant que des produits de grandeurs de dimension 1 donnent des grandeurs de dimension 2.

Comme indiqué au préalable, la réponse peut être justifiée de la manière suivante :



$2u \times \frac{3}{5}u = \frac{30}{25}u^2 = \frac{6}{5}u^2$ $\qquad$ $\frac{2}{5}u \times 3u = \frac{30}{25}u^2 = \frac{6}{5}u^2$

2. Dans le cadre des « fractions abstraites »

Une autre manière de faire consiste évidemment à partir de la relation scalaire sans dimension : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

On a : $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{1 \times d} = \frac{a \times c}{d \times 1} = \frac{a}{d} \times \frac{c}{1} = \frac{a}{d} \times c.$

Compléments et remarques sur certains passages des séquences

1re séquence

Le document d'accompagnement « Grandeurs et mesures au Collège », daté de mars 2016, reprise d'une première édition d'octobre 2007, et que l'on trouve toujours sur le site http://eduscol.education.fr à cette référence, fournit un résumé assez précis de ce qui est mathématiquement défini comme étant une grandeur.

Ayant défini une relation d'équivalence ~ sur un ensemble X d'objets, par exemple la congruence sur l'ensemble X des segments, alors les classes d'équivalence sont des grandeurs de même espèce. Il s'agit par exemple de la grandeur « longueur » dans le cas de la congruence des segments. Ci-dessous, on reproduit un extrait du document d'accompagnement précité dans lequel sont définies les opérations sur les grandeurs ainsi qu'un ensemble de résultats dont on fait figurer la propriété (7) qui garantit, entre autre, la « divisibilité » d'une grandeur par un entier ; en fait la multiplication externe par l'inverse de l'entier.

> On désigne par G (comme grandeur) l'ensemble des classes d'équivalence pour ~ dans X, noté X/~. Dans la suite, la classe de x est notée $\tilde{x}$. À partir de la structure (X, ~, □ , $\oplus$) ainsi supposée, on définit alors sur G :
> - un *ordre total* : $\tilde{x} < \tilde{y}$ s'il existe $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$ tel que x' □ y'.
> - une *addition* : $\tilde{x} + \tilde{y}$ est l'ensemble des z tels que $z \sim x' \oplus y'$, où $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$
>
> On définit la *multiplication* par un entier n à l'aide de l'addition itérée.
> - une *soustraction* : $\tilde{x} - \tilde{y}$ est l'unique élément de G qui, ajouté à $\tilde{y}$ donne $\tilde{x}$.
> - une *division* par $n \in \mathbf{N}^*$: le quotient de $\tilde{x}$ par n est $\tilde{y}$ où y est tel que :
>
> $y \sim y_1 \sim \ldots \sim y_n$, avec $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$.
> […]
> Pour tout g, on pose en outre $1g = g$ […]
> Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un élément h de G et un seul tel que $g = nh$. (7)

Lors de la 1re séquence, les élèves rencontrent une nouvelle fois, ou pour la première fois, des espèces de grandeurs ; uniquement des grandeurs continues, mesurables ou pas. Les grandeurs discrètes, dans le cas fini à l'école primaire, associées au cardinal d'un ensemble à l'aide de la relation d'équipotence, fournissent des mesures sous la forme de nombres entiers. Cela même si l'enseignement ne repose pas, dans la plupart des cas, sur une assise constituée de la grandeur « cardinal d'un ensemble fini ». On s'appuie cependant sur la connaissance des entiers naturels chez les élèves, ainsi que sur celle de la multiplication par un entier en tant qu'addition répétée. Les élèves ont précédemment établi un certain rapport à la notion de multiple et diviseur lors de l'étude des tables de multiplication.

Cette nouvelle rencontre avec les grandeurs a lieu, dans cette 1re séquence, à partir de la relation d'ordre. Elle permet de différencier l'objet et la grandeur attachée à l'objet. L'ordre est modifié, non pas sur l'objet ce qui n'a pas de sens, mais à l'aide de la mesure de la grandeur variable que l'on a choisie… Ainsi, on tente de détacher les élèves de l'idée prégnante de la fraction d'objet (pizza, tablette de chocolat, etc.) que l'on retrouve à foison dans les activités des manuels papier ou en ligne.

Revenant à l'axiomatique d'une grandeur, (G ; $\oplus$, . , $\otimes$) forme une algèbre sur un corps commutatif K. $\oplus$ et $\otimes$ sont des lois internes dans G, et . désigne la multiplication par un élément de K, un scalaire. (G ; $\oplus$, .) est un espace vectoriel sur K. L'algèbre des longueurs est de dimension 1, celle des aires de dimension 2, tout comme l'algèbre des nombres complexes, l'algèbre des volumes de dimension 3, etc. ; la dimension de la base fournit la dimension de l'algèbre. Lorsque le produit vectoriel, noté $\wedge$, est enseigné au cycle terminal, on peut définir l'algèbre $\mathbb{R}^3$ à partir de l'espace vectoriel ($\mathbb{R}^3$; +, .) sur $\mathbb{R}$ que l'on munit du produit vectoriel comme loi de composition interne.

Dans le cas présent, et bien que son existence ne soit que seulement postulée en l'absence d'une construction rigoureuse au niveau du Collège, K est le corps commutatif ($\mathbb{Q}$; +, ×). Ce qui signifie que dans le cas des grandeurs, le corps – en fait un demi-corps restreint aux positifs – est constitué des ***mesures rationnelles des grandeurs***. Dans cette proposition, « on part » des grandeurs pour faire rencontrer par les élèves et à partir de leur mesure, quelques éléments de $\mathbb{Q}$, plus précisément de $\mathbb{Q}_+$. L'algèbre des grandeurs G (longueurs ou aires essentiellement dans cette proposition) est constituée d'un espace vectoriel sur le corps des rationnels. Son existence est implicitement postulée à partir de la construction de quelques mesures rationnelles. Ne considérant que des mesures, on ne pourra considérer que les rationnels positifs.

Dans l'écriture $l = 2u$ $(= u + u)$, l et u sont des grandeurs de ***même espèce*** et 2 ***est un scalaire***, comme c'est le cas pour 2 dans : $\vec{v} = 2\vec{u}(= \vec{u} + \vec{u})$, où $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs d'un ***même espace vectoriel***.
La nécessité mathématique de considérer, dans un premier temps, la multiplication, et donc la division sur les grandeurs, comme étant des ***opérations par un scalaire*** (la multiplication étant une addition répétée n fois) oblige rigoureusement à écrire que : « $2u = l$ équivaut à $u = \frac{1}{2} l$ », et non pas $\frac{l}{2}$.
La multiplication interne, notée formellement $\otimes$, permet de définir les grandeurs-produits. Ainsi, dans cette proposition, l'aire et le volume par exemple. Notions qu'on étendra, à la suite de cette première rencontre, aux grandeurs produits et quotients du programme – kWh, débit, vitesse, etc. –, lorsque sera étudiée plus largement la proportionnalité… des grandeurs !

Pour définir les opérations addition-soustraction et multiplication-division sur les fractions, on continuera à s'appuyer sur les grandeurs. Mais le travail sur les fractions de grandeurs s'estompera progressivement pour laisser place à des calculs sur des fractions abstraites, c'est-à-dire qui s'abstraient des grandeurs dont elles sont des mesures, en tant que nombres pour lesquels les opérations sont internes : on travaillera alors dans ($\mathbb{Q}_+$; +, ×).

2^e^ séquence

On l'a noté en préambule de cette séquence : celle-ci est sans doute la plus cruciale pour la suite de ce PER. C'est sans doute aussi l'une des plus délicates à faire travailler par les élèves. La raison tient aux mathématiques elles-mêmes et à un subtile dialectique système-modèle, souvent implicite dans l'enseignement ordinaire, mais sur laquelle s'appuie explicitement cette séquence, ainsi que les suivantes.

II. 1. Remarques sur la substitution de u par $\frac{1}{2}l$

La substitution de u par $\frac{1}{2}l$, peut être jugée trop difficile à faire entendre par des élèves de 6e (ce qui mériterait d'être effectivement vérifié), de même que la manipulation du symbole « = ». Le problème éventuel de la substitution pourrait se régler en « le matérialisant ». Par exemple, on pourrait indiquer, au-dessous et non sur, des bandes de longueur-unité u afin de ne pas entretenir la confusion entre la grandeur-longueur et l'objet, leur « nouvelle longueur » $\frac{1}{2}l$.
L'idée qui consiste à faire vivre dans le cas $a = 2$, puis à l'étendre à $a = 9$, le résultat $a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ pourrait peut-être vivre auprès des élèves en revenant à la division par 2 : comme $\frac{1}{2} = 1 \div 2$, alors $2 \times \frac{1}{2} = 2 \times (1 \div 2) = 1$. *A priori*, la chose ne paraît pas plus claire, sauf en passant par une formulation orale. On peut dire ainsi : « en rassemblant les deux moitiés de quelque chose, on obtient ce quelque chose en entier ! » Ou encore, plus près de l'écriture du calcul : « si on commence par diviser quelque chose par 2, puis qu'on multiplie le résultat obtenu par 2, cela revient à n'avoir rien fait et à retrouver ce quelque chose en entier ! » Le problème concerne le « quelque chose » que beaucoup de monde associe à « la chose », c'est-à-dire à l'objet… et non à la grandeur associée à l'objet.

- $l = 2u = 2 \times \frac{1}{2}l = \frac{2}{2}l = 1l$; $\frac{2}{2}$ se lit « *2* demis » et $\frac{2}{2}l$ se lit donc « *deux demis* de l » ;
- $L = 9u = 9 \times \frac{1}{9}L = \frac{9}{9}L = 1L$; $\frac{9}{9}$ se lit « *9 neuvièmes* » et $\frac{9}{9}L$ se lit donc « *neuf neuvièmes de L* ».

II. 2. Remarques sur les unités

A partir du 2. 2. 3., il semble intéressant, et peut-être plus efficace, dans les expressions du type « un demi de l » de considérer que le « *un* » désigne la mesure, et le « *demi de l* » désigne l'unité utilisée. Il faut insister pour associer les fractions à la création d'unités, ce qui permettra de justifier plus tard le passage aux fractions décimales.
Faire la différence entre « ***un neuvième*** *de l* » et « **un** neuvième de l » est délicate mais essentielle et permet d'éviter beaucoup d'implicites par la suite et, d'une certaine manière, prépare les futurs types de tâches relevant des conversions d'unités de mesure. C'est ce qu'on peut constater dès la question cruciale :
On a obtenu les mesures de l et de L en prenant u comme longueur-unité. Pourrait-on se passer de u ? Autrement dit :

- ***Pourrait-on obtenir la mesure de L en prenant l comme longueur-unité, donc écrire L à l'aide de l et d'une fraction ?***
- ***Pourrait-on obtenir la mesure de l en prenant L comme longueur-unité, donc écrire l à l'aide de L et d'une fraction ?***

Ces remarques apparaissaient d'une assez grande subtilité, difficile à faire entendre aux élèves. Elles méritent d'être rendues plus explicites, ou encore plus fonctionnelles, dans la mesure où, si on saisit bien la nuance par écrit, on risque de ne pas l'entendre à l'oral. En tout état de cause, il est nécessaire de développer davantage en montrant le danger « des implicites à éviter par la suite » ; donc en les explicitant.

II. 3. Incise didactique relative au 2. 2. 3, concernant la dialectique système-modèle

Il faut être conscient que l'on engage en ce point les élèves dans ***un processus de modélisation*** portant sur le système constitué des bandes de papier qui, comme c'est bien souvent le cas, se développe à l'aide ***d'outils ostensifs*** de natures différentes : des ostensifs scripturaux mathématiques comme $\frac{1}{2}$, =, l, u d'une part, et des objets matériels, des bandes de papier de longueur-unité d'autre part.
Les ostensifs scripturaux évoquant ce qui se fait matériellement avec les bandes de papier, il est possible ***d'opérer des allers et retours entre les deux*** afin de s'assurer à la fois de la maîtrise que l'on a du passage de la manipulation matérielle à l'écriture mathématique, et de vérifier que l'écriture mathématique obtenue correspond effectivement à la manipulation matérielle qu'elle modélise. Ce travail est souvent oublié, implicite. Cet « oubli », renvoyé à ce qui est de l'ordre du privé ou de l'insu de l'élève, risque fort de constituer des obstacles et difficultés futures. Ci-dessous, on explicite cette dialectique système-modèle dans le cas du modèle $u = \frac{1}{2} l$.

Ainsi, ***savoir « lire » ou « déchiffrer » une expression*** comme $u = \frac{1}{2} l$, en disant « u égale un demi de l » ***diffère de l'interprétation qu'on en fait*** avec la phrase « pour fabriquer une bande de longueur u, il nous faut une bande de longueur l qu'on divise en deux bandes de longueurs égales, puis on reporte une de ces deux bandes ».
Le sens de lecture (linéaire de gauche à droite) devrait, à cette étape de la séquence, plutôt renvoyer à des allers et des retours avec son interprétation, comme l'indique le schéma ci-dessous :

Lecture dans le modèle ⟷	***Interprétation dans le système***
$u = \frac{1}{2} l$	Manipulation de bandes : étapes *a*, *b* et *c*.
« u est égale à un demi de l »	« Pour fabriquer u : - *a*. il nous faut une bande de longueur l - *b*. qu'on divise en deux bandes de longueurs égales - *c*. puis on reporte une de ces deux bandes de longueurs égales »

Une dernière remarque porte sur ***la puissance d'un modèle***.

Lorsqu'on écrit $u = \frac{1}{2}l$, « l » peut renvoyer au souvenir de la bande de papier hachurée ; c'est le cas dans la classe à ce moment de la séquence. Mais pour une personne extérieure à la classe, qui ne sait pas ce qui s'y est passé, qui prend seulement connaissance de l'écriture $u = \frac{1}{2}l$, et qui sait identifier l'ostensif « l » à une longueur, parce que c'est traditionnellement le cas dans l'institution scolaire à ce niveau, ce peut être n'importe quelle longueur relative à n'importe quel objet ; pas forcément cette bande de papier.
Pour elle qui ignore à la fois la matérialité de ce que désignent « u » et « l », « l » devient la variable « longueur » pouvant prendre plusieurs valeurs.

Un pas de plus : si l'on met à distance la signification attribuée à « l », mais qu'on continue à se placer dans le domaine des grandeurs, cette égalité peut désigner n'importe quelle grandeur, pas nécessairement une longueur, ainsi qu'un lien particulier entre deux grandeurs de même espèce ; « u » et « l » deviennent des paramètres.
Le modèle constitué par $u = \frac{1}{2}l$ permet ainsi « d'oublier » le système qui lui a donné naissance.
C'est ce que l'on fait traditionnellement en mathématiques où l'on ignore le plus souvent à quel système se réfère une écriture algébrique, mais où cela n'empêche pas le calcul.
Cet « oubli » permet alors de se lancer dans l'étude du système en lui-même, ou « pour lui-même ». Par là, on voit donc que ***l'activité mathématique crée et nécessite oublis (du système modélisé) et… souvenirs (des techniques et des concepts propres au modèle, pas nécessairement du système).***
Encore un niveau de plus : $u = \frac{1}{2}l$ peut être étudié comme relation fonctionnelle entre deux grandeurs de même espèce : en ce cas particulier, il signe un lien de proportionnalité entre deux grandeurs.

Ce petit exemple veut montrer que ***l'activité de mathématisation est une activité récurrente de modélisation et qui engage la mémoire,*** ou plus précisément le souvenir et l'oubli. Le temps didactique, celui créé par les notions mathématiques qui se succèdent dans l'enseignement et qui avance, produit dans les classes des contrats didactiques nouveaux qui assignent aux élèves la nécessité de décoder ce qui est attendu d'eux : sur cet exemple, que « voir » dans $u = \frac{1}{2}l$? Des feuilles de papier, des variables, des inconnues, des paramètres, une relation fonctionnelle, etc. ?

Il est souvent vain pour le professeur de vouloir expliciter ce qu'il faut voir : c'est pourtant le propre d'une technique massive d'enseignement, l'ostension qui consiste à montrer avec une certaine insistance, à l'efficacité toute relative. Car à la place de cette « monstration », c'est l'interaction d'une personne avec une situation qui lui permet peut-être de la voir comme on souhaite qu'elle la voie. Encore faut-il que les divers assujettissements auxquels cette personne se soumet ou s'est antérieurement soumise, lui permettent d'intégrer et de partager cette situation ; donc une signification.

II. 4. Incise didactique relative au 2. 2. 3, concernant la mesure

La mesure d'une longueur a été précédemment obtenue dans cette séquence 2, ***en fractionnant*** une longueur ; il s'agit donc ***d'une fraction de grandeur***. Si l'on « oublie » les unités et la grandeur, la mesure est effectivement un scalaire, un nombre. Cette possibilité ouvre sur le

travail portant sur de nouveaux nombres, obtenus à partir des mesures : les nombres rationnels, dans ce cas les rationnels positifs seulement.
« Auparavant », c'est-à-dire avant la réforme des « mathématiques modernes », un rationnel écrit sous forme fractionnaire était appelé une ***fraction abstraite***, parce qu'elle était abstraite des grandeurs dont la mesure lui avait donné naissance.

Ainsi on tenait compte de la distinction à opérer : comme mesure d'une grandeur d'une part, et en faisant abstraction de la grandeur d'autre part. Ce processus relève ici encore ***de la modélisation*** (autrefois parfois appelée « abstraction ») intrinsèque aux mathématiques. C'est en suivant un tel processus de mathématisation, donc de modélisation, que cette proposition sur les fractions en 6^{e} tente de conduire les élèves ; d'abord des mesures de grandeurs, puis des calculs sur ces mesures « en faisant abstraction » des grandeurs qu'elles mesurent. Autrement dit des calculs dans $\mathbb{Q}_+$ tout d'abord, puis plus tard dans $\mathbb{Q}$, le travail entrepris en 6^{e} se poursuivant dans les classes suivantes.

Enfin, les opérations sur les fractions abstraites (addition-soustraction, multiplication-division) ainsi que l'ordre, sont justifiées par les manipulations effectives sur les fractions de grandeur. Ainsi ajouter deux fractions correspond de manière classique à l'addition des longueurs de deux segments (des bandes) mis bout à bout. Mais les écrire avec le même dénominateur est obtenu, de manière moins classique, par subdivision des longueurs des deux segments ou des bandes, afin de rechercher une commune mesure-unité qui elle-même fournit, *in fine*, le dénominateur commun (*cf.* séquence 6). De même le calcul du produit des fractions abstraites est justifié par la recherche de la mesure d'une aire de rectangle et, pour cela, par la construction d'une unité d'aire à partir des unités des longueurs de ses côtés, etc. La multiplication des fractions est ainsi associée au passage de grandeurs de dimension 1 à des grandeurs de dimension 2.
Le système des grandeurs sur des objets permet de justifier, construire et rendre compréhensibles les règles de calcul sur les fractions abstraites. En ce sens les fractions de grandeur, et le travail que les élèves ont à faire sur celles-ci, jouent le rôle ***d'élément technologique*** pour les techniques sur les fractions abstraites.

L'ancrage des nombres sur les grandeurs et leurs mesures a disparu avec la réforme des « mathématiques modernes ». Il a par conséquent disparu depuis cinquante ans de la culture des enseignants au profit direct, et d'expérience souvent grandement incompréhensible des élèves, de la définition du quotient : $bq = a$ (a et b entiers avec $b \neq 0$). Cela sans qu'on se pose la question, que peuvent aussi se poser les élèves, de l'existence de q, puisque « on "sort" de $\mathbb{N}$ lorsque a n'est pas un multiple de b ». Ce dernier point n'est jamais soulevé pas des puristes attachés à la rigueur… « qu'on doit accorder aux mathématiques à enseigner ».

On a donc, avec la réforme des mathématiques modernes de 1971, tourné le dos à la construction ancienne des rationnels à partir des fractions, qui s'appuyait sur les grandeurs. Faisant cela, on savait très bien par quoi la remplacer rigoureusement : par une construction de $\mathbb{Q}$ à partir d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ (ou sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$) puis « en quotientant » par cette relation d'équivalence.

Cette dernière construction rigoureuse, basée sur l'enseignement des structures algébriques, a été progressivement bannie des programmes qui ont succédé à ceux de 1971 ; d'abord avec le programme de la réforme Haby, entré progressivement en application à partir de 1977, puis avec les programmes de 1985 et années suivantes.
A la disparition des grandeurs du programme en tant qu'appui pour la construction des nombres, notamment rationnels, a donc succédé, quelques années plus tard, la disparition des structures algébriques dont l'une des fonctions consistait à permettre la construction des ensembles de nombres. On aboutit désormais à une sorte de « suspension en l'air » d'une définition du

quotient – $bq = a$ (a et b entiers avec $b \neq 0$), valable aussi si a ou b ne sont pas entiers –, qui permet de faire advenir les rationnels et par suite les décimaux dans le curriculum, mais reste le plus souvent incomprise de nombre d'élèves. C'est ce que nous avions pu constater lors d'évaluations menées en 5^{e} et 4^{e} sur le collège Marseilleveyre de Marseille dans les années 2010, bien avant que cette proposition d'enseignement existe.

En ce qui concerne les fractions inverses, on sait que la définition tient du symétrique d'un élément pour la deuxième loi dans un corps commutatif privé de l'élément neutre de la première ; ici ce sera le cas de $(\mathbb{Q}, +, \times)$, seul corps commutatif implicitement rencontré, sans en dire davantage, au niveau du Collège.

Revenant aux fractions en 6^{e}, leur multiplication n'est pas encore à enseigner à ce moment du cursus. Ce travail peut être mené sur les grandeurs, mais il faut alors tenir compte de leurs dimensions : par exemple passer de grandeurs de dimension 1 à des grandeurs de dimension 2 en effectuant leur produit (cas des aires), de 1 à 3, ou de 1 et 2 à 3, (cas des volumes). D'où, si on souhaite à l'avenir se dégager progressivement des grandeurs pour étudier les opérations sur les fractions, notamment la multiplication et la division en 4^{e}, la rencontre avec la nécessité de faire advenir les fractions abstraites à ce moment du PER.

3e séquence

Dans cette proposition, et comme on l'a dit en préambule, les fractions sont amenées à partir de la mesure des grandeurs.

Un ouvrage assez connu, publié en 1932 – *Précis d'arithmétique, classes de 6e, 5e, 4e et 3e* de Pierre Chenevier –, donnait la définition d'une fraction de grandeur :

> **207. — Définition.** — *Une grandeur* **A** *est dite fraction d'une grandeur* **B** *de même espèce, lorsque ces deux grandeurs sont constituées chacune par la réunion d'un nombre entier de grandeurs égales à une grandeur auxiliaire* **C**.
> *Cette fraction de grandeur est définie par les deux nombres entiers* a, b *qui sont les mesures de* **A** *et de* **B** *avec* **C** *pour unité auxiliaire. En pratique, la grandeur* **B** *est souvent l'unité choisie.*

La « grandeur auxiliaire » C est partie aliquote des grandeurs A et B et l'on voit apparaître, dans cette définition, la ***mesure*** d'une grandeur grâce à une « grandeur auxiliaire » : $A = a \times C$ signifie que la ***mesure de A est a si l'on prend C pour « grandeur auxiliaire ».*** Evidemment, a et b sont des entiers puisque les grandeurs A et B sont « constituées chacune par la réunion d'un nombre entier de grandeurs égales » à une autre qui est la grandeur C.

On remarque que cette définition évite le mot « division » au profit du mot « réunion d'un ***nombre entier*** de fois ». La multiplication qui est en jeu est donc une addition répétée. Il s'en suit que la fraction d'une grandeur ne peut être que rationnelle.

Dans le cas $A = \frac{a}{b} \times B$ – en toute rigueur, ce produit d'une grandeur par un scalaire ne devrait pas être noté à l'aide de ×, mais soit à l'aide d'un point, ., soit directement $\frac{a}{b}B$ (*cf.* les remarques concernant la première séquence) – on dit que A est les a-$b$ièmes de B. On a aussi $B = \frac{b}{a} \times A$ et on dit que B est les b-$a$ièmes de A. Par exemple si on écrit $A = \frac{3}{5} \times B$, on dit que la grandeur A est les trois cinquièmes de la grandeur B.

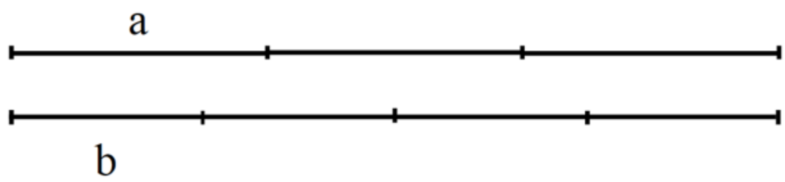
Plus rigoureusement, deux grandeurs G et G' sont dites ***commensurables*** si et seulement si il existe une grandeur u (appelée partie aliquote) et deux entiers n et m tels que : $G = nu$ et $G' = mu$. Une définition équivalente est la suivante : on dit que deux longueurs sont ***commensurables*** si et seulement si leur rapport est un nombre rationnel. On a alors : $\frac{G}{G'} = \frac{n}{m}$ ou encore $G = \frac{n}{m} \times G'$. $\frac{G'}{G} = \frac{m}{n}$ permet d'écrire $G' = \frac{n}{m} \times G$. A l'opposé, la longueur de la diagonale du carré et la longueur du côté fournissent l'exemple classique de leur incommensurabilité.

Résultent de ces deux définitions équivalentes deux techniques permettant de déterminer le rapport de deux longueurs a et b commensurables.

L'une consiste à rechercher une commune mesure à a et b, traditionnellement désignée par u puisque nous savons par avance que ce sera la longueur-unité. Cela correspond à la technique et la définition données par le manuel de P. Chenevier dont un extrait est reproduit ci-dessus.

L'autre consiste à reporter, par exemple parallèlement, les segments représentant ces longueurs un certain nombre de fois chacun, jusqu'à obtenir deux segments de même longueur.

La figure ci-dessous illustre cette technique pour $3 \times a = 4 \times b$



On a ainsi : $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.

Dans la séquence 2, on s'est appuyé sur la définition et la technique qui font intervenir une partie aliquote, soit donc une unité.

Dans la séquence 3, on utilise la définition et la technique qui font intervenir le rapport rationnel des grandeurs ; notamment des longueurs. L'un des intérêts didactiques de ce choix consiste à faire travailler la technique du passage de produits aux quotients.

4e séquence

Incise relative au 4. 4., concernant le passage de la fraction de grandeur à la fraction abstraite

Avec des grandeurs, rechercher q revient à écrire $qu = \frac{a}{b}u$. Il s'agit du travail sur un cas particulier de la propriété (1) antérieurement établie : *« bg = aG* équivaut à $g = \frac{a}{b}G$ (et à $G = \frac{b}{a}g$) » (1). La propriété (1), dans le cas particulier *« b(qu) = au »,* permet d'écrire que : $qu = \frac{a}{b}u$. Ce qui prouve que $q = \frac{a}{b}$ est, à partir d'une ***mesure***, l'unité étant u, l'écriture d'un ***nombre***. C'est le nombre qui multiplié par b donne a puisque $b(qu) = [(bq)u = au]$, en admettant une associativité qui est d'ailleurs un axiome de l'algèbre des grandeurs. On retrouve en ce point la définition de $\frac{a}{b}$ qui figure au programme de 6e.

Remarque

Un autre axiome des grandeurs stipule que pour tout grandeur $g \in G$, on pose $1g = g$. Ainsi ce qu'on écrit 4 cm est en fait, formellement ce qu'on devrait rigoureusement écrire : 4. (1. cm)…

Par exemple, dans le cas des longueurs, pour rechercher le nombre q tel que 3 q cm = 7 cm, qu'on devrait, en toute rigueur, écrire 3 . (q .1cm) = 7 .1cm*,* on sait que la propriété qui vient d'être institutionnalisée ci-dessus équivaut à q cm = $\frac{7}{3}.1\text{cm} = \frac{7}{3}\text{cm}$.

Au début du PER, séquence 2, lorsque les élèves écrivent $u = \frac{1}{2}l$, le sens porté par la notation, et qui est institutionnalisé, est le suivant : l est divisée par 2 et non pas le 1 qui figure au numérateur de $\frac{1}{2}$. Ainsi dans $L = \frac{9}{2}l$, la longueur l est divisée en 2 et pour obtenir la longueur L il faut 9 fois la longueur $\frac{1}{2}l$.

Sans l'axiome $1g = g$, $u = \frac{1}{2}l$ aurait dû s'écrire $u = \frac{1}{2}.(1.\,l)$! Dans la pratique des calculs, où on aurait dû écrire q cm = $\frac{7}{3}.1\text{cm} = \frac{7}{3}\text{cm}$, il arrive que l'on écrive même, comme étape intermédiaire, q cm = $\frac{7\text{cm}}{3}$… et on a alors tendance à attribuer à 7cm une division par 3, et non pas à la mesure d'une longueur qu'on aurait dû formellement écrire $\frac{1}{3}.(7.\,1\text{cm})$. Ces subtilités, qui sont de l'ordre de la rigueur, disparaissent lorsqu'on « oublie » les grandeurs et que l'on ne travaille plus sur les fractions de grandeurs, mais sur les fractions abstraites, obtenues à partir des mesures de grandeurs. Ainsi lorsqu'on résout l'équation d'inconnue q, $3q = 7$, on sait, par définition que q s'appelle ***le quotient*** de 7 par 3, noté $\frac{7}{3}$, dont des valeurs approchées sont obtenues à l'aide d'un algorithme de division, ou encore par encadrement, mais pour le quotient q qui s'écrit $\frac{\sqrt{e}}{\pi^{3/5}}$, évoquer une division n'aurait peut-être pas grand sens...

5^e *séquence*

Remarque concernant la seule addition des numérateurs

On sait d'expérience que des élèves ont tendance, dans le cas de l'addition des fractions, à ajouter entre eux les numérateurs, et entre eux les dénominateurs : $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d+d}$. La tentation est encore plus grande lorsque les fractions sont de dénominateurs différents : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

Une fois institué et travaillé dans des exercices, le passage de « $\frac{2}{9}L+\frac{5}{9}L$ » à « $\frac{2+5}{9}L$ » fait appel à un automatisme « pratique » résultant d'une technique en cours de routinisation : on « fait » ainsi, sans plus se poser la question du pourquoi « on fait ainsi ». La justification est « oubliée », même si elle provient d'une manipulation sur des bandes de papier. De ce fait, la raison qui fait qu'on additionne les numérateurs, et non les deux dénominateurs, devient une boîte « grise », voire « noire », pour beaucoup d'élèves. De ce point de vue, on justifie ce calcul par « une règle » à connaître : « pour ajouter deux fractions de même dénominateur, on n'ajoute que les numérateurs ».

Néanmoins, travaillant dans le modèle, une justification « davantage mathématique » peut être fournie. Pour cela, on considère que dans les écritures $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$ l'unité est « le neuvième de L ». Alors, $\frac{2}{9}L= 2\times\frac{1}{9}L$ et $\frac{5}{9}L= 5\times\frac{1}{9}L$.

La distributivité de la multiplication externe sur les grandeurs, dans ce cas la grandeur $\frac{1}{9}L$, permet d'écrire : $2\times\frac{1}{9}L+5\times\frac{1}{9}L=(2+5)\times\frac{1}{9}L=7\times\frac{1}{9}L=\frac{7}{9}L$

Cette manière de considérer la grandeur $\frac{1}{9}L$ en l'associant au calcul algébrique fournit la justification au fait que seuls les numérateurs s'additionnent. Elle est de nature « praxéologique », c'est-à-dire à la fois issue de la pratique et justifiée à partir de ce que montre l'écriture algébrique.

Les élèves, et personne en particulier, ne revient au calcul $2\times\frac{1}{9}L+5\times\frac{1}{9}L=(2+5)\times\frac{1}{9}L=7\times\frac{1}{9}L=\frac{7}{9}L$ lorsqu'il doit calculer $\frac{2}{9}L+\frac{5}{9}L$. Aussi, ce que montre encore une fois la dialectique système-modèle est la perte, ***dans le modèle « algébrique »***, même restreint à $\frac{2}{9}L+\frac{5}{9}L=\frac{2+5}{9}L$, de la justification, autrement dit de la technologie pour la technique qui consiste à n'additionner que les numérateurs.
Cet oubli, difficile à identifier chez les élèves et d'une assez grand subtilité mathématique, relève de la connaissance du cadre dans lequel ils travaillent : dans le modèle « algébrique » où l'on écrit « $\frac{2}{9}L+\frac{5}{9}L$ », en faisant abstraction de la matérialité des bandes de papier, ou au contraire, en se souvenant du système constitué des bandes de papier mises bout à bout ? Ce qui renvoie à ce qu'ils font matériellement en additionnant des longueurs. Autrement dit,

relativement à quelle praxéologie s'intéresse-t-on à la présence ou à l'absence de l'élément technologique ?
La question peut être résolue, notamment dans la partie relative à la construction du calcul de la somme $\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L$ et de sa justification, en faisant matériellement vivre cette dialectique système-modèle par les élèves. Par exemple avec des bandes de papier qui matérialisent et rendent matériellement « visible » $\frac{1}{9}L$.

Ainsi, deux bandes de longueurs respectives $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$ sont mises bout à bout :

Dans lesquelles $\frac{1}{9}L$ est la longueur de  la bande

La question devient : ***combien de fois*** $\frac{1}{9}L$***pour la longueur totale obtenue en mettant les deux bandes bout à bout ? Comment cela peut-il s'écrire avec des fractions ?***

On s'attend à ce que les élèves écrivent $\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L = \frac{7}{9}L$. On leur demande alors de le justifier par des écritures fractionnaires, ce qu'ils vont probablement écrire :
$\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}\ L = 7 \times \frac{1}{9}L$. C'est alors au professeur de demander « d'où vient le 7 ? » et de rappeler que $7 \times \frac{1}{9}L = \frac{7}{9}L$. La distributivité permettant d'obtenir 2 + 5 par factorisation de $\frac{1}{9}L$est alors utilisée, mais toujours de manière implicite dans le modèle par les élèves. La justification, du point de vue des élèves, provient de l'appui sur ce que la matérialité des bandes de papier permet de voir ; ce que l'on peut compter, avec le doigt si nécessaire, pour le prouver de manière incontestable !

6^e séquence

VI. 1. Sur la démonstration de $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$ et sur l'opposé d'un enseignement par étude et recherche

Les *Repères annuels* de progression pour le cycle 4 explicitent, à partir d'un exemple, ce qu'il faut entendre par une « démonstration possible de l'égalité des fractions à partir de la définition du quotient ». Dans la colonne de ces *Repères* consacrée à la 5^e, on trouve « un exemple de calcul fractionnaire permettant de démontrer que $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ ». La description de la démonstration qui suit interroge d'un point de vue didactique.
En effet, il est tout d'abord demandé de calculer $\frac{2}{3}\times 15$, sans qu'on (les élèves) sache pourquoi. Puis de décomposer 15, toujours sans qu'on sache pourquoi : $\frac{2}{3}\times 15=\frac{2}{3}\times 3\times 5$. On sollicite alors la définition du quotient : elle « permet de simplifier par 3, puisque $\frac{2}{3}$ est le nombre qui multiplié par 3 donne 2 ». Un élève curieux se demandera sans doute pourquoi simplifier. La réponse se trouve dans les égalités suivantes : $\frac{2}{3}\times 15=\frac{2}{3}\times 3\times 5=2\times 5=10$. En utilisant de nouveau la définition du quotient, l'écriture $\frac{2}{3}\times 15=10$ signifie que $\frac{2}{3}$ est le quotient de 10 par 15. Autrement dit que $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$. CQFD.

Ce court exemple, s'il est mathématiquement valide, engage, d'un point de vue didactique, vers l'exact opposé d'un enseignement bâti sur l'étude des élèves par la recherche. Aux questions qui, dans un PER, fondent en raison les mathématiques par lesquelles on souhaite faire passer les élèves pour les étudier, se substitue dans cette proposition un cheminement sans raison apparente. Il ne peut alors qu'être montré aux élèves ; c'est le recours obligé à l'ostension dans le cas exposé : on montre et le lecteur est supposé y voir ce qui est montré. Ou, dans sa forme moderne en vigueur dans le système des classes de mathématiques, le recours à l'ostension déguisée : on montre le savoir en le masquant afin de laisser croire que ce sont les réponses données par les élèves à des questions enchaînées qui le produit. Sous cette forme, l'exposé de l'établissement de $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ qui précède sera entrecoupé de questions qui conduisent vers la réponse attendue.

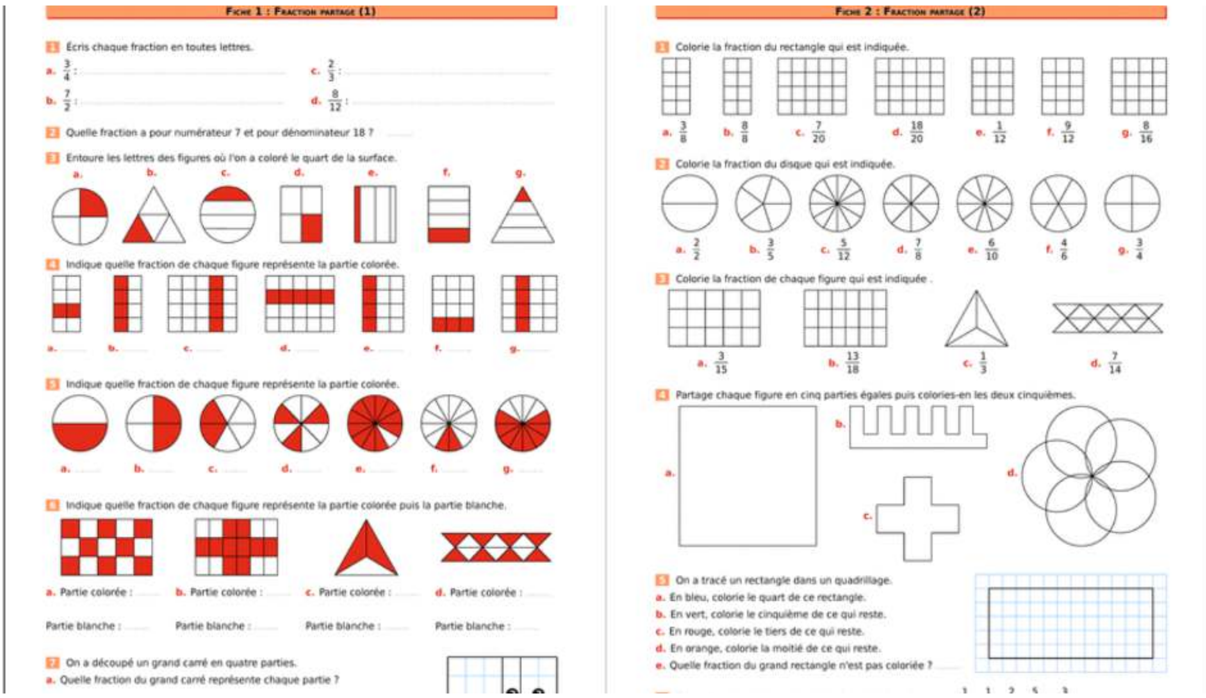
A ce niveau du cursus, l'exposé de $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ s'appuie en effet sur une certaine virtuosité mathématique dont ne disposent pas la majorité des élèves de 5^e. On peut tenter de se mettre à la place d'un élève, il en existe quelques-uns, qui se poserait des questions au fur et à mesure de l'avancée dans le raisonnement qui précède ; que ce soit sous la forme de l'exposé tel qu'il figure dans les *Repères*, ou sous la forme « didactifiée » des questions enchaînées. Trouver les causes motivant ce raisonnement nécessite de la part de cet élève un effort de reconstruction qui n'est seulement possible qu'en étant parvenu au bout du chemin, après l'avoir docilement suivi. Pourquoi 15, et pas un autre nombre, pourrait se demander cet élève ? Cette démonstration serait-elle valide avec, par exemple, 14 ? Répondre à ces questions aboutirait, après un véritable travail mathématique personnel, à une sorte de « Euréka ! C'était donc tout ça pour ça... ».

Une recherche de réponse engagerait en effet vers une nouvelle étude permettant de comprendre qu'une fraction irréductible de dénominateur 3 ne peut être équivalente qu'à une autre de dénominateur un multiple de 3, comme c'est le cas de 15, et non pas de 14. Et alors, pourquoi un dénominateur égal à 15 et pas à 9 ; est-ce qu'on n'aurait pas aussi $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$? Ce type de travail, qui n'est pas évoqué, renvoie dans le meilleur des cas à la sphère privée d'élèves qui se posent personnellement des questions mathématiques. Il leur faut pour cela rompre avec une clause du contrat didactique classique stipulant que les objets mathématiques nouveaux, et les questions afférentes, ne sont amenés que par le professeur. Peu le font.

Ce banal exemple constitué d'une démonstration de $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$, renvoie vers une forme d'enseignement à l'opposé d'un enseignement des mathématiques dont les élèves seraient acteurs, qui ferait vivre par le plus grand nombre le travail et la recherche mathématiques. Nous n'empruntons donc pas la voie suggérée à ce moment du cursus par ce passage des *Repères*.

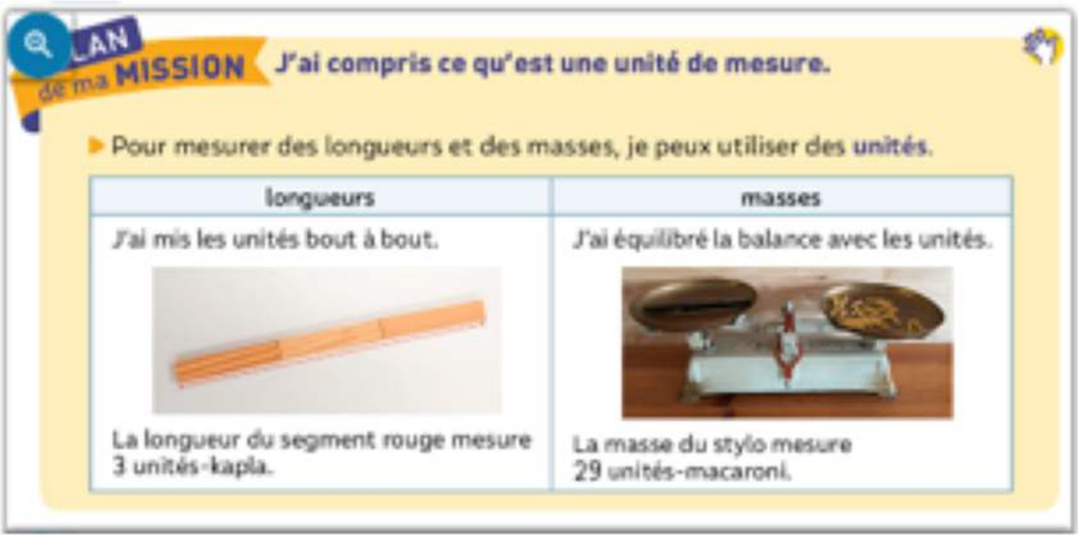
VI. 2. Ce que l'on trouve dans des manuels et ce qui en résulte pour l'apprentissage des élèves à partir du Curriculum qui leur est Institutionnellement Offert

Pour cerner ce que peut être le Curriculum Personnellement Vécu (CPV) par les élèves à partir d'un Curriculum Institutionnellement Offert (CIO), le recours aux manuels constitue un bon indicateur. Par exemple l'extrait ci-dessous du manuel Sesamath CM2 de 2023 fournit des informations intéressantes.



Dès l'exercice 4 de la première fiche, puis tout au long de la fiche 2, la confusion est établie entre un objet et une grandeur : les textes évoquent « la fraction de la figure », sans aucune mention de longueur et encore moins d'aires. Quand on souhaite utiliser ce que l'on croit simple pour les élèves, parce que faisant appel à « la vie courante », dans ce cas à la pratique du partage, on « oublie », le plus souvent sans s'en apercevoir, la modélisation mathématique et physique.

Ce faisant on crée des difficultés à venir chez les élèves, en ne distinguant pas objet et grandeur, qui peut varier, affectée à l'objet.
Un autre exemple de confusion objet-grandeur est fourni par un manuel de CE1. Lorsqu'il tente d'enseigner la mesure des grandeurs, ce manuel fait disparaître la grandeur derrière l'objet. Le livre parle alors « d'unité-kapla »[5] et « d'unité-macaroni » ; à suivre ce manuel, la grandeur-unité deviendrait « grandeur-marque de jouets » ou « grandeur-variété de pâtes » !


PLAN de ma MISSION J'ai compris ce qu'est une unité de mesure.

Pour mesurer des longueurs et des masses, je peux utiliser des unités.

longueurs	masses
J'ai mis les unités bout à bout.	J'ai équilibré la balance avec les unités.
La longueur du segment rouge mesure 3 unités-kapla.	La masse du stylo mesure 29 unités-macaroni.

On connaît les effets des insuffisances de ce type de Curriculum Institutionnellement Offert pour la suite de la scolarité des élèves. Si la première rencontre des élèves avec les fractions est celle décrite dans ce manuel, la compréhension et la maîtrise des notions dans lesquelles elles interviennent – proportionnalité entre grandeurs, fractions de grandeurs, pourcentages de grandeurs, puis écritures algébriques ou résolutions d'équations, autrement dit ce qui fait intervenir des nombres sous la forme de variables, d'inconnues ou de paramètres – risquent très en deçà des attendus, et sources d'échecs tenaces et répétés chez beaucoup d'élèves. En somme, la fraction partage est, en France et à partir de ce type de manuels, l'archétype d'un enseignement au contenu mathématiquement problématique dès le plus jeune âge. Programmes et manuels, comme on vient de le voir, en constituent des indices.

Un enseignement présentant de nombreuses lacunes, tant mathématiques que didactiques, organise cependant une certaine rencontre des élèves avec une propriété importante du point du curriculum : celle relative aux fractions équivalentes. Elle est illustrée dans l'extrait de Sésamath par le dessin « g » de l'exercice 5, et le dessin « c » de l'exercice 6 : dans les deux cas, les « deux tiers de la figure » sont colorés, en passant sous silence qu'il s'agit de fractions de grandeurs. Ces dessins veulent montrer l'équivalence entre la fraction $\frac{2}{3}$ et la fraction $\frac{8}{12}$.
Puisqu'est « oubliée » que la fraction considérée est celle d'une grandeur, qu'il s'agisse de la même grandeur – pour pouvoir comparer ce qui est comparable !–, est passé sous silence…
Et qu'il s'agisse de la même grandeur n'est pas forcément le cas sur les deux exercices concernés de Sésamath…
En effet, dans l'exercice 5g la grandeur considérée peut être la congruence de secteurs angulaires, l'égalité d'angles ou l'égalité d'aires. Dans l'exercice 6c, il ne peut guère s'agir que de la congruence (ou égalité) de triangles, d'où résulte l'égalité d'aires. La « monstration » permet à certains élèves – ceux qui ne verront dans ces figures que des surfaces dessinées et penseront alors à la grandeur-aire –, et à la satisfaction des auteurs, d'établir que : « en

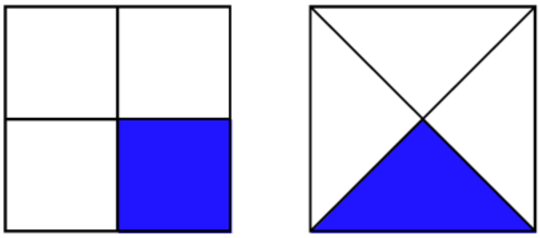
[5] Kapla est une marque de jouets en pin.

multipliant le numérateur et le dénominateur de l'une par un même nombre, on obtient une fraction égale à la première ». Aux différences perceptives et cognitives entre élèves, et qui portent dans ce cas et implicitement sur des grandeurs associées à des objets, se rajoute alors une différence d'apprentissage : entre ceux qui verront ce qu'on souhaite leur montrer et les autres.

Cette technique, basée sur l'ostension, peut être vue par des professeurs de 6^e qui ont à poursuivre l'étude des fractions, comme réalisant un fragile point d'appui entre ce qu'ils peuvent supposer des connaissances disponibles chez des élèves venus du CM2, et ce que nous proposons dans ce PER. Il s'agit donc d'un pari que peuvent tenter des professeurs en 6^e, à cette étape du PER, face à des élèves à propos desquels ils présupposent un rapport antérieur aux fractions équivalentes, mais sur l'élaboration et la solidité duquel ils ne peuvent se prononcer.

Partant de ces présupposés, qui resteraient à établir beaucoup plus fermement, il est possible d'imaginer que les rapports des élèves aux fractions leur permet d'admettre, sans le recours aux grandeurs, la relation : $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ puisque colorier « un tiers d'un carré » puis colorier un autre « tiers du carré » revient à colorier « deux tiers du carré ». Rappelons que parler de « tiers de carré » ou de n'importe quel autre objet n'a pas de sens mathématique (*cf.* page 5 du document Eduscol *Grandeurs et mesures au collège*).

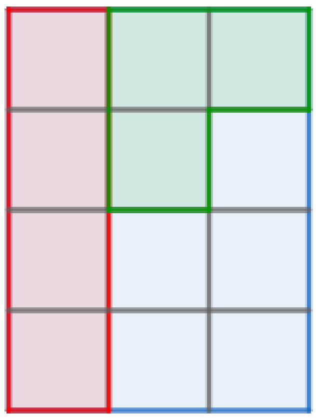
Deux figures extraites de la page de ce document, représentant des carrés de même longueur de côté, permettent de comprendre facilement cela.



Dans chacun des cas, l'aire des parties bleues, de formes différentes, mesure le quart de l'aire du carré. Par contre, les périmètres de ces parties bleues ne sont pas égaux au quart du périmètre de ces carrés : la moitié du périmètre du carré de gauche pour le carré bleu et $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ fois le périmètre du carré de droite pour le triangle isocèle bleu. Si ces carrés représentent des gâteaux dont le pourtour des parts est cerclé de crème, à aires de parts égales, une personne gourmande aura plutôt intérêt à choisir le découpage du carré de droite car $\frac{\sqrt{2}+1}{4}>\frac{1}{2}$! Au-delà de la forme de l'objet qui varie, parler de fraction d'un objet sans mentionner la grandeur qui lui est attachée n'a pas de sens et est donc laissé à la libre interprétation d'une personne… Ce que voit le professeur en montrant ces figures sans indiquer la grandeur n'est pas forcément ce qu'y voient les élèves.

Revenant aux fractions d'objets, en fait aux fractions de grandeurs attachées à des objets, à partir du calcul $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ on pourrait faire apparaître le PPCM 12 de 3 et 4, en rompant le contrat didactique relatif aux fractions partages, et en recourant pour cela à ***une grandeur, l'aire,*** comme le montre l'exemple qui suit.

La fraction $\frac{1}{3}$ peut en effet être associée dans la figure de gauche ci-dessous, à la mesure de l'aire d'une bande rouge dans le cas où l'unité est l'aire du rectangle. De même pour la fraction $\frac{1}{4}$, mesure de l'aire de la partie verte de la figure de droite, de mêmes dimensions et donc de même aire que le rectangle de gauche :



Le polygone vert peut être aussi vu comme $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$ « de la figure » ; en fait de l'aire de la figure.

Le PPCM de 3 et 4 apparaît alors, permettant d'illustrer deux points de vue en examinant la figure :

1) On montre que : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}$;
2) Et on voit que, en associant implicitement les surfaces virtuellement découpées à leur aire, le PPCM de 3 et 4 qui est 12 permet de redécouper la figure de départ en faisant apparaître des fractions équivalentes au tiers et au quart de la figure, afin de montrer ainsi que : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$.

7^e^ séquence

VII. 1. A propos de proportionnalité

Jusqu'à présent, dans ce PER, nous n'avons pas proposé de faire explicitement travailler par les élèves la proportionnalité des grandeurs, bien que certains lecteurs puissent parfois y voir, implicitement et à juste raison, la notion. Il est en effet difficile de ne pas activer une certaine familiarité culturelle et scolaire personnelle, très souvent partagée par les élèves et leurs professeurs.

Disons tout de suite qu'il est possible d'enseigner le produit des fractions à partir de la proportionnalité ; celle-ci s'appliquant à ***des grandeurs***. Une certaine tradition scolaire, qui a connu son développement avec « la réforme des mathématiques modernes » et dont des traces perdurent, associe la proportionnalité à des suites de nombres dites proportionnelles. Même dans le cas où les grandeurs sont indiquées en première colonne d'un tableau, le travail effectif ne porte guère que sur des nombres, pas sur les grandeurs. Sans forcément qu'ils le sachent lorsqu'on n'enseigne et n'évalue que la technique, les élèves travaillent sur des suites finies de ***mesures*** de grandeurs. La signification des nombres positifs du tableau comme mesures de grandeurs, et le fait que ces mesures puissent être *a priori* en nombre infini, disparaissent derrière des opérations sur des nombres. Puis, lorsque sont enseignées les fonctions linéaires, apparaissent des nombres négatifs : soit dans les calculs, soit à partir de la lecture des coordonnées de points de représentations graphiques. Les idées de grandeur et de mesures, ces dernières devant être forcément positives, disparaissent ; les négatifs étant des nombres « au-delà de la mesure », comme l'indiquait, pages 7 et 8, le document d'accompagnement *Les nombres au collège*. Quant à la règle de trois, elle est souvent recouverte par la technique recourant à l'égalité « des produits en croix », de même que la recherche d'une quatrième proportionnelle dont a disparu le terme « d'égalité des extrêmes et des moyens ». Le dispositif ostensif constitué des tableaux, s'il permet un gain pratique lors des moments de travail de la technique, crée l'oubli des raisons mathématiques constitutives de l'organisation mathématique : elles commandent pourtant les étapes du fonctionnement technique adéquat des opérations dans les tableaux.

C'est ainsi que, bien que le programme du CM1 mentionne que « les élèves commencent à résoudre des problèmes de proportionnalité portant sur des grandeurs », l'idée de grandeur attachée à la proportionnalité semble s'étioler au fil du cursus, au profit de techniques sur des nombres dans des tableaux, comme indiqué ci-dessus. De là à n'enseigner plus guère que la technique, en oubliant les raisons qui la commandent et la justifient, il n'y a qu'un pas… C'est alors cet aspect seulement technique du rapport établi à la proportionnalité qui subsiste chez nombre des élèves ayant suivi un curriculum recourant essentiellement à des propositions et des exercices issus de manuels portant sur des suites de nombres présentées en tableaux.

Utiliser la proportionnalité des grandeurs, notamment des longueurs, a été le choix fait pour le produit des fractions dans la publication bien connue *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* de Guy et Nadine Brousseau. On s'appuie sur l'agrandissement du puzzle, dans la partie intitulée « Image d'une fraction », pages 146 et suivantes. Le terme « image » indique d'ailleurs que l'on utilise une fonction linéaire. Il s'agit tout d'abord de la fraction $\frac{5}{7}$. Elle est explicitement considérée comme mesure de la longueur d'une pièce d'un puzzle qu'on agrandit de manière à ce qu'une autre pièce de longueur mesurant 4 ait, par agrandissement, une longueur mesurant 11. Faisant de la sorte, on multiplie une mesure de longueur, par exemple

$\frac{5}{7}$ cm par le coefficient de proportionnalité $\frac{11}{4}$, qui est dans ce cas ***un scalaire*** car rapport de deux grandeurs de même espèce (des longueurs), et non pas mesure d'une grandeur. On obtient alors la mesure d'une nouvelle longueur : $\frac{11}{4}\times\left(\frac{5}{7}\text{cm}\right)=\left(\frac{11}{4}\times\frac{5}{7}\right)\text{cm}$, en admettant valide une associativité propre à l'algèbre des grandeurs.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, devant enseigner le produit des fractions à des élèves qui n'ont pas forcément établi un rapport adéquat à la proportionnalité, le choix fait pour cette séquence consiste à ne pas évoquer explicitement la proportionnalité, tout en continuant à s'appuyer sur les grandeurs. La proportionnalité interviendra de manière explicite lors de la séquence suivante, consacrée au quotient de fractions. Il faudra pour cela donner aux élèves et leur faire travailler une définition plus rigoureuse de la proportionnalité de deux grandeurs. Cela afin qu'ils ne confondent pas la mesure d'une grandeur avec un coefficient de proportionnalité, comme rapport de grandeurs de même espèce ou d'espèces différentes ; donc scalaire ou non.

Pour faire advenir la nécessité du produit de deux fractions, deux approches traditionnelles sont possibles à partir des grandeurs. Il en existe d'autres, d'apparence plus simple car portant sur des opérations algébriques, qui se passent donc des grandeurs et de leurs mesures, et utilisent certaines propriétés d'opérations sur des nombres. Nous ne recourons pas à ces approches car le sens des opérations algébriques que l'on fait, c'est-à-dire la dimension technologique de la technique qui permet de la comprendre, n'est pas clairement visible des élèves à ce niveau du cursus.

VII. 2. L'aire comme produit de deux longueurs

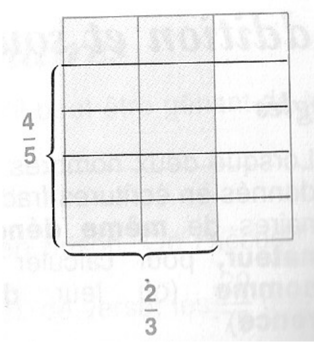
Cette manière d'amener la nécessité du produit de deux fractions est très connue. Elle a même parfois été utilisée en primaire pour le produit de deux entiers associé à l'aire du rectangle.

On choisit une longueur-unité u et un carré de côté $1u$. Son aire est $1u \times 1u$. Soit ce qu'on note $1u^2$.

En effet, à titre de justification de cette notation, on a décidé qu'un nombre n multiplié par lui-même se note n^2 ; on étend cette notation aux grandeurs. Aussi a-t-on : $1u \times 1u = (1 \times 1) \times (u \times u) = 1 \times u^2$; commutativité et associativité étant admises pour les nombres et les grandeurs.

A partir d'une longueur-unité u, on obtient une nouvelle unité pour une nouvelle grandeur, l'aire, et l'aire-unité se note u^2. Le choix de commencer de partir de l'aire d'un carré, et non pas de celle d'un rectangle, permet de faire vivre l'unité d'aire à partir de ***la même unité de longueur***.

On se démarque de la sorte des dessins qui accompagnent sur ce point les activités des manuels, et dans lesquels l'unité d'aire est *sous-entendue*, de même que l'unité de longueur. C'est par exemple le cas dans la figure ci-dessous, extraite d'un manuel, dans laquelle on ne sait à quelles unités de grandeurs réfèrent les fractions écrites en marge du dessin, de même que l'aire du rectangle grisé :



Suivant cette figure, est-on sûr que le fait de passer d'une grandeur de dimension 1 à une grandeur de dimension 2 soit seulement *vu* des élèves, alors même que les grandeurs sont absentes ? C'est ce contre quoi mettent en garde les auteurs d'un ouvrage intitulé *Apprentissages mathématiques en 5e*, édité en 1993 par l'ex-INRP, et faisant partie de la collection ERMEL. Cette collection ayant surtout diffusé pour les niveaux du primaire et non du secondaire, l'ouvrage de 5e est souvent resté méconnu.

L'idée pour notre proposition consiste donc à considérer tout d'abord un carré-unité et à faire trouver, ou à enseigner, à quoi est égale son aire : $1u \times 1u = 1 \times u^2$. Sur deux de ses côtés, on considère les segments [AE] et [AG], dont les mesures des longueurs sont respectivement $\frac{a}{b}u$ et $\frac{c}{d}u$; ***on conserve ainsi l'unité u*** pour obtenir une grandeur de dimension 2 dont la mesure est exprimée en u^2. On construit alors un rectangle $AEFG$.

Comme ses côtés ont pour longueurs $\frac{a}{b}u$ et $\frac{c}{d}u$, et que les élèves connaissent depuis le CM2 la formule de l'aire du rectangle, son aire, égale à $AE \times AG$, est $\frac{a}{b}u \times \frac{c}{d}u$; ce qui permet de définir $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}u^2$ et non pas $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$. L'aire est alors exprimée dans une unité… d'aire, soit grâce à « des u^2 », et on cherche, d'après la figure, à quoi elle est égale.

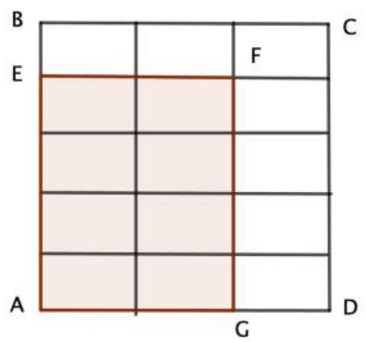


Figure dans le cas $AG = \frac{2}{3}u$ et $AE = \frac{4}{5}u$

Le raisonnement consiste à dire que l'aire $1u^2$ est aussi égale à $b \times d$ fois l'aire de chaque « petit rectangle élémentaire » ainsi obtenu. L'aire de l'un de ces rectangles étant $\frac{1}{b \times d}u^2$, et comme il y a $a \times c$ rectangles contenus dans le rectangle *AEFG*, on a alors pour son aire : $\frac{a}{b}u \times \frac{c}{d}u = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}u^2 = \frac{a \times c}{b \times d}u^2$.

Remarques

- Dans le cas où on calcule le produit de fractions supérieures à 1, c'est-à-dire dont l'un ou les deux côtés du rectangle ont une longueur supérieure à $1u$, le raisonnement est le même tout en conservant le carré *ABCD* d'aire $1u^2$. L'aire du rectangle ainsi obtenu est plus grande que l'aire de *ABCD* et sa mesure est supérieure à $1u^2$. On peut faire varier les dimensions du rectangle : par exemple avec une dimension supérieure à $1u$ tandis que l'autre lui est inférieure… Ainsi on peut se poser la question de la comparaison de l'aire du rectangle obtenu avec l'aire du carré : est-elle inférieure ou supérieure à $1u^2$?

- La formule du calcul du produit de deux fractions ayant été établie de manière empirique à partir de quelques exemples et du travail jusqu'ici mené dans ce PER, notamment de ce que signifient numérateur et dénominateur, on admet qu'elle est vraie quelles que soient les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, indépendamment des grandeurs et des unités considérées. $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des mesures de grandeurs quelles qu'elles soient, dont « on n'a plus écrit » l'unité : ce sont des ***« fractions abstraites »***. D'où, pour ces fractions abstraites : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

- On peut retrouver la relation $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d} = \frac{a}{d} \times c$ du programme de 6e de deux manières.

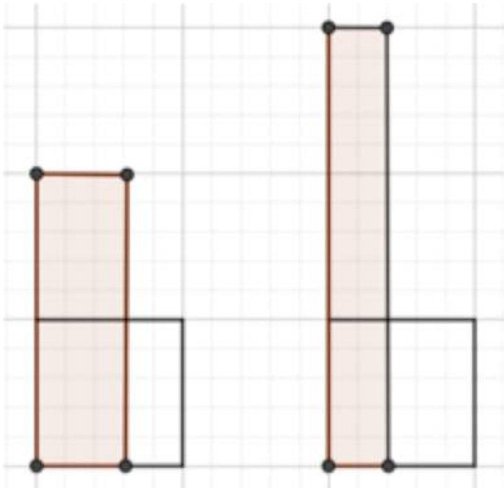
1. ***La plus mathématiquement rapide*** – mais est-elle simple lorsqu'on l'enseigne à des élèves de 6e, puisqu'elle y figure au programme, peu rompus aux manipulations algébriques ? – consiste à travailler sur les fractions abstraites, en utilisant la relation sur le produit des fractions qui vient d'être établie, et la commutativité de la multiplication dans ℕ : $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{1 \times d} = \frac{a \times c}{d \times 1} = \frac{a}{d} \times \frac{c}{1} = \frac{a}{d} \times c$.

2. Une autre manière de faire consiste à s'appuyer sur les grandeurs. Dans ce cas, il est nécessaire de remarquer un passage délicat que l'on n'a pas choisi d'enseigner en 6e. En effet, en 6e, l'égalité $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$ résultait non pas du produit de deux grandeurs, les longueurs dans ce cas, mais de l'addition répétée *a* fois (*a* entier naturel) de la longueur $\frac{c}{d}u$. Ce qu'indique l'écriture $a \times \frac{c}{d}u = \frac{a \times c}{d}u$. L'établissement du troisième terme $\frac{a}{d} \times cu$ de l'égalité $\left(a \times \frac{c}{d}u = \frac{a \times c}{d}u\right) = \frac{a}{d} \times cu$ est délicat car il nécessite un changement de point de vue qu'il faudra négocier avec les élèves, au risque de provoquer une franche rupture de contrat. En effet, si $a \times \frac{c}{d}u$ peut être interprété comme ***l'addition répétée a fois de la longueur*** $\frac{c}{d}u$***,*** l'expression $\frac{a}{d}cu$ est alors interprétée non plus comme une addition répétée $\frac{a}{d}$ fois de la longueur *cu*, puisque mais $\frac{a}{d}$ n'est pas un entier, mais ***la fraction*** $\frac{a}{d}$ ***de la longueur cu***. C'est

à ce prix qu'on peut donner du sens à la relation $a\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\times c$ en 6^e autrement qu'en vérifiant l'égalité à partir de constats empiriques sur des valeurs numériques, sans en saisir autrement la raison.

Par contre, en raisonnant sur le produit de deux grandeurs, on « retrouve du sens » à l'écriture des trois termes de cette égalité. Cela parce que ce produit n'est plus une grandeur de dimension 1 comme dans le cas de la multiplication externe (par un scalaire entier naturel), mais une grandeur de dimension 2. La relation devient en effet : $au\times\frac{c}{d}u=\frac{a\times c}{d}u^2=\frac{a}{d}u\times cu=\frac{a}{d}\times cu^2$.

C'est ce qu'illustrent les exemples des figures ci-dessous, dans lesquels le quadrillage aide à compter le nombre des 25-ièmes de la mesure de l'aire du carré-unité :



$2u\times\frac{3}{5}u=\frac{30}{25}u^2=\frac{6}{5}u^2$ $\qquad$ $\frac{2}{5}u\times 3u=\frac{30}{25}u^2=\frac{6}{5}u^2$

On peut alors généraliser « en donnant du sens » à : $au\times\frac{c}{d}u=\frac{a}{d}\times cu^2$, puis finalement obtenir le résultat sur des fractions abstraites : $a\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\times c$.

VII. 3. Le produit comme composition des mesures de grandeurs

Cette entrée se rapproche de celle utilisée dans *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* cité plus haut, pour des agrandissements ou réductions des dimensions des pièces d'un puzzle, à la différence fondamentale près ***qu'elle ne fait pas explicitement appel à la proportionnalité*** (*cf.* les remarques préliminaires en tout début de ce texte).

Elle consiste, par exemple, à considérer tout d'abord un premier segment de longueur $S_1=\frac{c}{d}u$, u étant une longueur unité. Puis à prendre un deuxième segment de longueur S_2 exprimée en fonction de S_1 : $S_2=\frac{a}{b}S_1$. La question que l'on se pose est celle de la possibilité d'exprimer S_2 en fonction de u et non pas de S_1. On a facilement : $S_2=\frac{a}{b}S_1=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}u$.

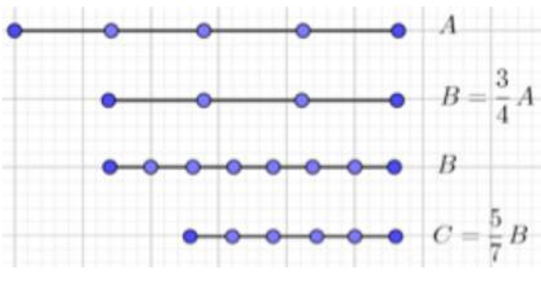
On se sert alors de la commensurabilité. $S_1 = \frac{c}{d}u$ équivaut à $d \times S_1 = c \times u$ (1) et $S_2 = \frac{a}{b}S_1$ équivaut à $b \times S_2 = a \times S_1$ (2). On multiplie alors les deux membres de l'égalité (1) par a et ceux de l'égalité (2) par d.
On obtient ainsi $a \times d \times S_1 = a \times c \times u$ (1') et $d \times b \times S_2 = d \times a \times S_1$ (2')
Comme $a \times d \times S_1$ ($= d \times a \times S_1$) est une expression commune aux égalités (1') et (2'), on obtient alors : $a \times c \times u = d \times b \times S_2$
D'où $S_2 = \frac{a \times c}{b \times d}u$ et donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}u = \frac{a \times c}{b \times d}u$.

Ce calcul utilisant la régularité de tout élément pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, puis la transitivité de l'égalité, correspond plus ou moins à une suggestion que l'on trouve dans le document d'accompagnement édité par Eduscol, *Le calcul numérique au collège*, page 13, dans un paragraphe mentionné comme… étant réservé aux professeurs ! Et pour cause…

Un tel calcul nécessite en effet, et de prime abord, une certaine virtuosité algébrique. Tel quel, on voit mal comment le transformer en une activité au sein de laquelle les élèves ne seraient pas guidés pas à pas. Autant s'engager alors dans un enseignement de type magistral au cours duquel le professeur « fait seul des mathématiques », tandis que des élèves, bien disposés dans le meilleur des cas, le regardent faire en essayant de comprendre.

On peut cependant, en vue d'une activité pour la classe, simplifier les mathématiques exposées ci-dessus, en utilisant pour cela un cas particulier dans lequel les propriétés sous-jacentes sont passées sous silence, mais qui permet de faire travailler les élèves. Comme toujours, on admettra que ce qui a été obtenu dans ce cas particulier est vrai dans le cas général, puis peut être étendu aux fractions abstraites. C'est ce que propose un manuel ancien dû à P. Chenevier (1932), intitulé *Précis d'arithmétique. Classes de 6^e^, 5, 4^e^ et 3^e^* dont un court extrait est reproduit ci-dessous.

On considère une grandeur A, par exemple une longueur, puis une longueur $B = \frac{3}{4}A$ et une longueur $C = \frac{5}{7}B$. On demande quelle fraction $\frac{a}{b}$ pour $C = \frac{a}{b}A$. On sait qu'on aura $C = \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}A$



On part pour cela de ce dont « on » se doute (comment ne pas voir le professeur derrière ce « on » !) : $4 \times 7 = 28$ « petites » subdivisions du segment de longueur A. On obtient le segment de longueur $B = \frac{3}{4}A$. Celui-ci, constitué de 21 « petites » subdivisions, peut être subdivisé en 7 subdivisions de 3 « petites » subdivisions. Le segment de longueur C est constitué de 5 subdivisions de 3 « petites » subdivisions : soit $3 \times 5 = 15$ « petites » subdivisions. Ces

« petites » subdivisions étant obtenues à partir du segment de longueur A, on a $C=\dfrac{3\times 5}{4\times 7}A$.

Donc $\dfrac{5}{7}\times\dfrac{3}{4}A=\dfrac{3\times 5}{4\times 7}A$. La commutativité de la multiplication dans $\mathbb{N}$ peut être sollicitée pour écrire finalement : $\dfrac{5}{7}\times\dfrac{3}{4}A=\dfrac{5\times 3}{7\times 4}A$. Soit encore, en « oubliant » les grandeurs : $\dfrac{5}{7}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5\times 3}{7\times 4}$.

Comme on peut le penser, la réalisation matérielle des figures par les élèves, et notamment la subdivision dans cet exemple des segments en segments de longueurs un quart ou un septième de celle du segment initial, risquent de poser problème. Une solution consisterait, pour le professeur, à distribuer aux élèves des feuilles portant des segments dont les longueurs permettent aisément ce travail. On risque alors de glisser vers un forme d'ostension, en montrant par avance le résultat pour certains des élèves qui savent lire le choix judicieux de mesures de longueur, comme c'est le cas du quadrillage de la figure ci-dessus.

VII. 4. Remarques concernant le document d'accompagnement « Le calcul numérique au collège »

L'approche du produit par l'aire du rectangle, comme en VII. 2., est présentée dans le document *Le calcul numérique au collège* (op. cit.), pages 12 et 13 ; tout comme celle sur la composition des longueurs montrée en VII. 3. Il s'agit dans les deux cas de techniques classiques pour démontrer la relation donnant le produit des fractions, telles qu'on les trouve dans divers manuels de la première moitié du XX^{e} siècle. Bien que dans ce document d'accompagnement, le texte de ce passage s'attache, en son début, à l'aire d'un carré, le calcul montré est effectué, une fois de plus, ***« en oubliant » les unités des grandeurs*** en jeu : les longueurs et aires.

Dans ce PER, et tant que cela est nécessaire, notamment lorsqu'il s'agit d'établir les règles de calcul des opérations sur les fractions, on raisonne sur des grandeurs : cela permet de conserver le sens qui est associé aux dimensions techniques des résultats que l'on établit. Les fractions de grandeurs constituent les éléments technologiques qui permettent de produire, justifier et rendre compréhensibles les techniques opératoires sur les fractions abstraites. Ainsi, si l'on souhaite retrouver les raisons pour lesquelles, par exemple, il est nécessaire de réduire deux fractions au même dénominateur pour les ajouter, soustraire, comparer, alors que cela n'est pas le cas pour leur produit, un retour sur les grandeurs permet d'en fournir de nouveau la justification. Autrement dit, le PER porte en lui-même une ***dialectique entre système*** (les fractions de grandeurs, dites fractions « concrètes ») ***et modèle*** (les fractions « abstraites », nombres indépendants des grandeurs dont ils sont des mesures, et dont les unités ne sont pas, elles non plus, indiquées). Cette dialectique, propre au développement intra-mathématique (dans ce cas, des mesures rationnelles de grandeurs vers les nombres rationnels), peut exister « en acte » dans les classes pourvu que les professeurs en soient conscients et l'utilisent à bon escient.

VII. 5. Remarque à implication didactique importante

On retourne au cas de la figure précédemment rencontrée :

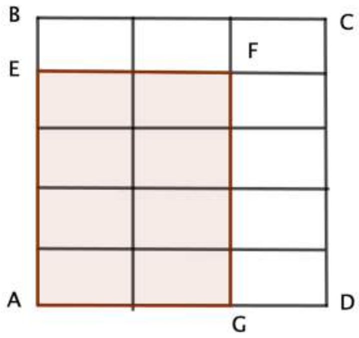


Figure dans le cas $AG = \frac{2}{3}u$ et $AE = \frac{4}{5}u$

Dans cette figure, la surface du carré a été quadrillée à partir des dénominateurs des fractions mesures des longueurs des côtés du rectangle bâti sur les côtés du carré : 3 et 5 sur cet exemple. L'unité d'aire « utile », celle à partir de laquelle seront dans un premier temps déterminées les aires du rectangle et du carré, ***n'est pas*** $\boldsymbol{u^2}$ où u désigne la longueur de côté du carré. Mais l'unité d'aire grâce à laquelle on compte est l'aire A d'un « rectangle élémentaire » contenu dans le rectangle *AEFG* et dans le carré *ABCD* ; soit $A = \frac{1}{3\times 5}u^2$. On a alors : aire *AEFG* = $(2 \times 4)A$ et aire *ABCD* = $(3 \times 5)A$.

Ainsi : $\frac{aire\ AEFG}{aire\ ABCD} = \frac{(2\times 4)\mathcal{A}}{(3\times 5)\mathcal{A}} = \frac{2\times 4}{3\times 5}$. Comme rapport de deux grandeurs de même espèce, dans ce cas les grandeurs sont des aires, c'est ***un scalaire***.

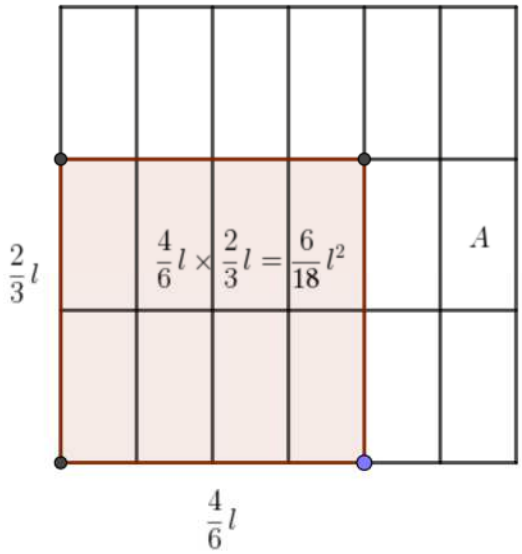
D'où aire *AEFG* = $\frac{2\times 4}{3\times 5}$aire *ABCD*.

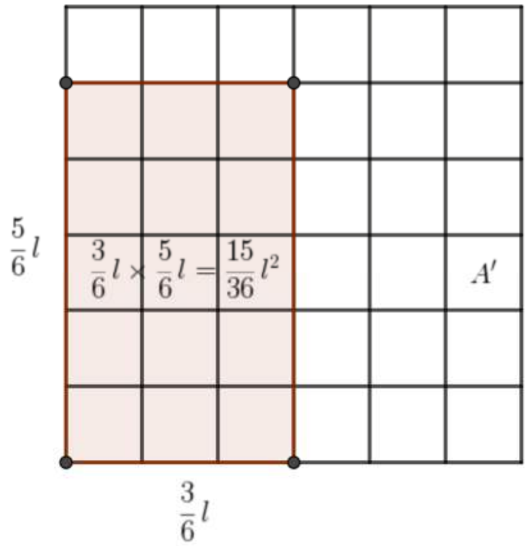
Mais comme aire *ABCD* = $1u^2$, alors aire *AEFG* = $\frac{2\times 4}{3\times 5}u^2$; c'est ***une mesure de grandeur***.

La technique qui consiste à utiliser l'aire du rectangle pour calculer le produit engage les élèves dans ***un changement d'unité d'aire*** consistant « à passer par A » pour obtenir u^2, en utilisant un scalaire afin d'obtenir *in fine* une mesure de grandeur… Ce changement d'unité apparaît clairement lorsqu'on conserve les unités d'aire dans les calculs, mais il a des chances de rester implicite lors les techniques de comptage oublieuses des grandeurs, spontanément utilisées par les élèves, quand elles ne sont pas implicitement proposées par les manuels.

De là des risques de confusion : avec quelle aire travaille-t-on, celle du carré ou celle des « rectangles élémentaires » ? La confusion risque de s'accroître encore lorsqu'à partir du même carré, le travail de construction du produit des fractions aboutit à dessiner des rectangles de dimensions différentes, donc à travailler sur des « rectangles élémentaires » différents, parce que les dénominateurs des fractions diffèrent. C'est ce dans quoi seront engagés les élèves dans la proposition que l'on trouvera en II.

Les « rectangles élémentaires » ont alors une aire A' qui diffère de l'aire A des précédents, mais les aires des rectangles de couleur, qui diffèrent, sont en définitive mesurées avec l'unité l^2 ; on y a remplacé la lettre u par l car les unités d'aire changent et on n'en privilégie pas une en particulier. l^2 est la mesure de l'aire du carré qui, quant à elle, ne change évidemment pas, comme l'illustre la figure ci-dessous.



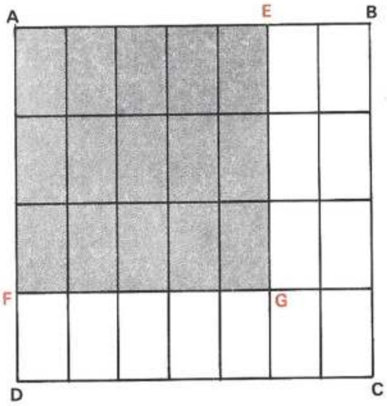


Une remarque importante portant sur le choix de fractions, irréductibles ou pas, est encore à faire. Sur les exemples ci-dessus, si au lieu des fractions $\frac{4}{6}$ et $\frac{3}{6}$ on avait choisi les fractions irréductibles équivalentes $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ – ce qui ne change évidemment rien aux produits $\frac{2}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ d'une part et $\frac{5}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$ d'autre part –, les quadrillages auraient changé et par conséquent les aires du type *A* et *A'*…

Recourir à la mesure de l'aire d'un rectangle issu d'un carré pour établir et justifier la technique du calcul du produit, renvoie ainsi à un jeu subtil, et parfois caché, entre unités d'aire ; celles-ci ***changent en fonction des valeurs des dénominateurs*** des fractions. Il faut en être conscient afin de ne pas laisser se développer des implicites qui finissent par créer des obstacles.

Les manuels scolaires contournent le plus souvent la difficulté en ne ***montrant*** guère qu'un seul exemple, et en ne travaillant dans le meilleur des cas – les auteurs des manuels et non pas les élèves – que sur la grandeur « cardinal d'un ensemble » ; l'aspect « grandeur » attachée au cardinal restant par ailleurs implicite quand elle n'est pas tout simplement attribuée à une autre, comme l'aire... Ainsi en est-il ci-dessous des deux exemples tirés de manuels scolaires, pourtant publiés à une quarantaine d'années de distance, mais dont l'analyse permet de retenir des constantes portant à la fois sur l'organisation mathématique enseignée et sur l'organisation didactique sous-jacente. Ces propositions, qui sont lourdes de confusions mathématiques sur les grandeurs, recourent à ***l'ostension***, assumée pour la plus ancienne, ou déguisée pour la plus récente, suivant le mode didactique en vigueur selon les époques.

14.1. multiplication dans $\mathscr{Q}$



1. Recherche d'une définition.

a) Soit un carré ABCD (rectangle particulier dont les côtés ont des longueurs égales).

Si [AB] est pris comme segment-unité, les mesures des longueurs des segments [AE] et [AF] sont $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$.

La mesure de l'aire du rectangle AEGF est $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ (*si on veut que la formule donnant la mesure de l'aire d'un rectangle reste valable dans* $\mathscr{Q}$).

D'autre part 1 étant la mesure de l'aire du carré, d'après la constitution de ce rectangle, la mesure de son aire est $\frac{15}{28}$.

Par suite on devrait avoir : $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$. Remarquons que : $\frac{15}{28} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$.

Extrait 1 provenant d'un manuel édité en 1979

L'extrait 1 montre qu'existe encore, à cette époque et dans ce manuel, une référence aux grandeurs, longueurs et aires, même si les unités ne figurent plus dans les mesures de longueur ou d'aire. Le calcul sur des nombres, sans mentionner les unités de grandeurs dont ils sont issus, est typique de cet « oubli » qui fut consacré par la « réforme des mathématiques modernes ». Ce manuel ne se rapporte pourtant pas à ce programme, mais à celui qui lui succède. Cependant l'oubli des unités de grandeurs, qui va jusqu'à l'oubli des grandeurs, perdure jusqu'à nos jours, comme le montre l'extrait suivant :

1 Activité

Multiplication

1 Nombres positifs

Eliot a coloré ci-contre en vert une partie d'un carré de côté 1.

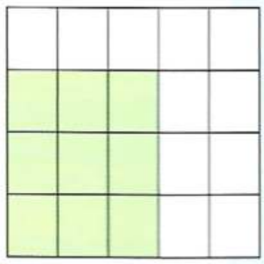
a. Quelle fraction du carré a-t-il colorée ?

b. Indiquer les dimensions du rectangle coloré à l'aide de fractions.

c. Utiliser la formule de l'aire d'un rectangle pour exprimer l'aire de la partie colorée à l'aide d'un produit.

d. Recopier et compléter : • $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{\dots}{\dots}$.

• « Pour multiplier deux fractions, on multiplie … et on multiplie…. »



Extrait 2 provenant d'un manuel édité en 2016

L'extrait 2 signe, dès la question *a*, la confusion entre objet et grandeur attachée à un objet : « Quelle fraction du carré a-t-il colorée ? ». Puis la question *c* renvoie vers une grandeur, l'aire, en demandant d'utiliser pour son calcul la technique « soufflée » dans la question *b* qui précède, mettant en avant les dimensions fractionnaires du rectangle coloré. Il est en effet implicite dans la question *b* que la fraction est celle d'une longueur, celle du carré, mais cela n'est pas indiqué. A l'issue de la question *c*, et comme il n'est nulle part indiqué que l'aire du rectangle sera fraction de l'aire du carré, les élèves l'auront-ils appris ? L'activité se termine en *d* par des questions à trou dont l'une contient l'énoncé incomplet de la technique du produit des fractions ; technique didactique typique de l'ostension déguisée.

Ainsi, dans cette activité, on a guidé les élèves tout au long de questions enchaînées qui ne sont guère motivées que par la volonté des auteurs du manuel, en leur montrant ce qu'il y a à faire. Puis on a fait croire aux élèves que ce sont eux qui, par leur travail, ont trouvé la réponse à une question qui ne leur a pas été posée…

Dans les deux cas, et ce sera aussi le cas dans les AER qui suivent dans cette proposition, la technique permettant de valider le lien entre le produit des fractions et l'aire passe par le décompte des « rectangles unités ». Mais avec des ***différences notables*** dans le cas des AER. De par leur principe en effet, elles ne sont pas construites sur ce qui est montré aux élèves, mais à partir d'une question qui leur est dévolue et dont ils sont les auteurs de la réponse, sous la direction du professeur.

Tout d'abord, les rectangles construits sur les côtés du carré, à partir de mesures fractionnaires de la longueur du côté du carré, ne seront pas montrés, mais seront à construire par les élèves. Cela permet de garder à l'esprit que leurs dimensions sont issues de rapports de grandeurs : la longueur. Ce seront encore les élèves qui auront à prendre l'initiative de construire un quadrillage du carré-unité, ***quadrillage variable de groupe en groupe selon les dénominateurs des fractions de longueurs***, afin de disposer d'une sous-unité d'aire leur permettant d'obtenir, par dénombrement, l'aire du rectangle recherchée. Celle-ci sera obtenue comme fraction de la mesure d'une grandeur, l'aire du carré, après changement d'unité. Tout au long du travail sera conservée l'écriture de l'unité de longueur ; ce qui montre que l'unité d'aire, de dimension 2, est obtenue comme produit de deux grandeurs de dimension 1. Cette notion sera ainsi devenue davantage familière lorsqu'il faudra travailler sur des grandeurs produits ou quotients. Le travail demandé aux élèves ne sera pas décomposé en sous-questions, comme dans le cas typique de l'extrait 2. Des questions pourront ou non apparaître au cours d'une recherche, sans doute parsemée de tâtonnements et d'erreurs chez les élèves, mais dirigée par un but dévolu au élèves dès le début du travail dans lequel ils seront engagés. Ce but consiste à trouver une réponse à la question cruciale qui sera dévolue : « *quelle fraction de l'aire d'un carré représente l'aire d'un rectangle construit sur les côtés de ce carré, les longueurs des côtés du rectangle ayant pour mesures des mesures fractionnaires des longueurs des côtés du carré ?* »