Première partie d'un PER sur les grandeurs et les fractions en 6e

Groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille mars 2023

Avertissement

Si on souhaite utiliser cette proposition en classe, ***il est indispensable de se l'approprier auparavant*** *; ce qui relève d'un travail plus exigeant que celui relatif aux activités des manuels. Par exemple en notant pour soi et séparément les points que l'on juge importants ou délicats, les moments où les élèves doivent travailler seuls ou en groupes, le temps qu'il faut laisser aux élèves pour chercher, ceux des moments où le professeur intervient et ce qu'il a alors à dire, à faire écrire, ou au contraire à ne pas dire, ne pas faire écrire, etc. Toute modification de l'ordre des séances, de leurs contenus, des valeurs attribuées aux variables didactiques, fait courir le risque d'un enseignement inefficace car éloigné du scénario didactique et mathématique promu dans cette proposition, et donc un apprentissage des élèves qui n'atteindra pas le but visé.*

Document provisoire inachevé mars 2023

1re séance
Nouvelles premières rencontres avec les notions de grandeur et d'ordre

1. 1. Cadrage mathématique et didactique

La première séance a pour objet de faire travailler par les élèves la notion de grandeur attachée à des objets ; dans ce cas des bandes de papier (ensemble *B*) et des livres (ensemble *L*). On fait rencontrer des propriétés variables d'éléments de *B* (la couleur, la longueur, l'aire, la rigidité, la largeur) et de *L* (la forme, la taille, l'épaisseur, le poids, l'aire de la couverture, la discipline scolaire, la couleur de la couverture).

La notion de grandeur est considérée comme relativement familière chez les élèves, sans même parfois avoir été nommée en tant que telle, car ils ont eu l'occasion de s'engager dans des pratiques sociales qui utilisent des grandeurs : la monnaie, le temps, la taille ou le poids... Mais le plus souvent, le terme « grandeur » ne paraît guère être connu autrement qu'associé à « grand », comme dans la phrase : « il est grand pour son âge ». A l'école, les élèves devraient avoir dû rencontrer la notion puisque elle figure, parfois avec insistance, dans les programmes des cycles 2 et 3. Si ce n'est pas le cas, on s'appuiera sur leur rapport culturel aux grandeurs construit à l'extérieur du système scolaire.

Dans un premier temps, on considère qu'une grandeur est « ***un des caractères d'un objet qui est susceptible de variation chez cet objet ou d'un objet à l'autre*** », et que les élèves peuvent appréhender ces caractères. C'est le cas des propriétés assignées aux objets face auxquels ils sont tout d'abord mis en présence : couleur, longueur, aire, rigidité, largeur, forme, taille, épaisseur, poids, discipline scolaire pour les livres, etc.

Dans un second temps, on ne considère que celles des grandeurs sur lesquelles on peut définir une relation d'ordre. On élimine donc les grandeurs non repérables et non mesurables comme la couleur, la forme, la discipline scolaire, par exemple.

En indiquant que l'on ne va s'intéresser qu'à la longueur, à l'aire et au poids, on place les élèves dans le seul cas des grandeurs mesurables, en évitant le cas des grandeurs seulement repérables, comme c'est le cas de la température... Ce qui permet de montrer que l'ordre, qui a permis de classer les objets, ne dépend pas de l'objet en tant que tel, mais de la grandeur attachée à l'objet. On a ainsi fait rencontrer l'ordre total sur les trois grandeurs considérées : longueur, aire et poids.

1. 2. Déroulement prévu pour la séance

Les élèves sont mis en groupe de quatre ou cinq et leur sont distribuées des bandes de papier (ensemble *B*) de longueurs différentes, ainsi que des livres (ensemble *L*) de poids différents. Par exemple cinq ou six bandes de papier cartonné, éventuellement de couleurs différentes mais de même largeur et de longueurs différentes, deux bandes ayant cependant la même longueur ; de même quatre livres (pas plus de quatre pour des raisons exposées plus loin) de tailles et de poids différents sans que deux d'entre eux aient le même poids (*cf.* figure 1). Les bandes de papier sont dépourvues de marques évoquant la possibilité d'une mesure.

Document provisoire inachevé mars 2020

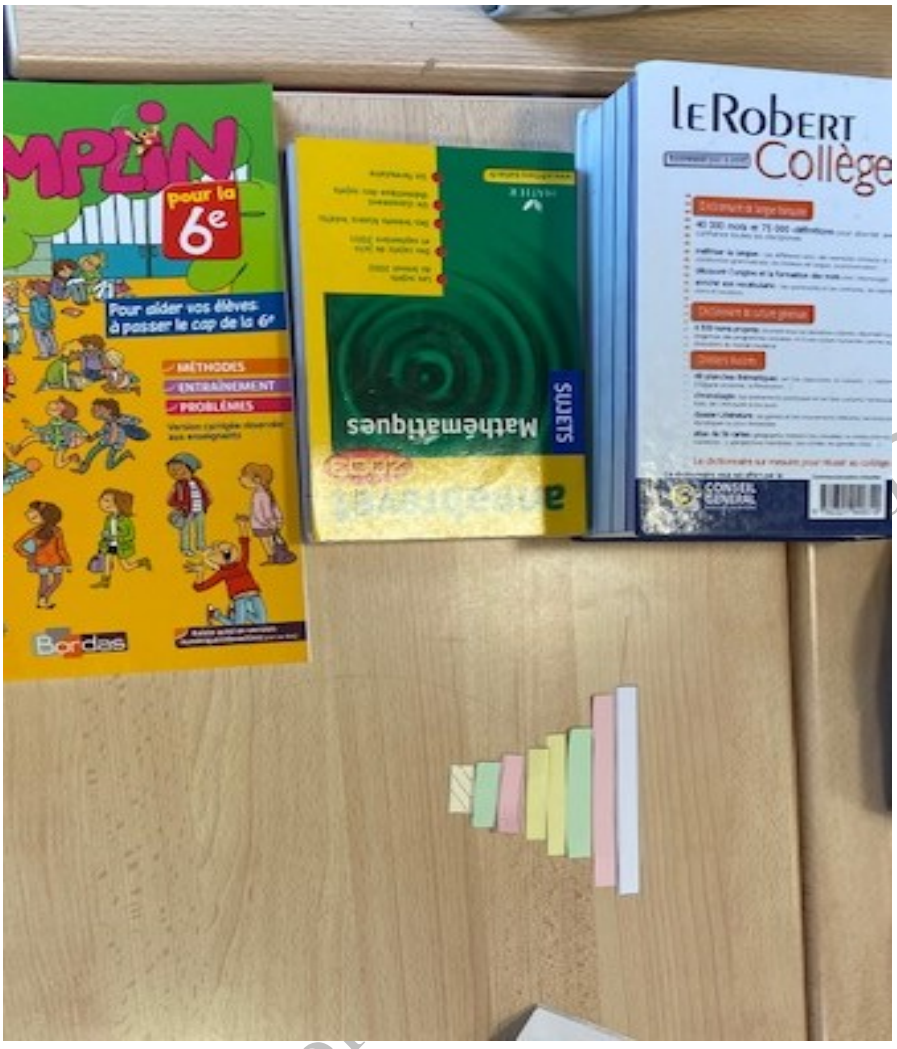


Figure 1. – Livres et bandes de papier mis à disposition des élèves dans une classe

Document provisoire 2023

1. 2. 1. Nouvelle première rencontre avec la notion de grandeur

Question génératrice : Voici des objets que vous connaissez bien : des bandes de papier et des livres. Quelles sont les propriétés, les points communs et les différences que partagent ces objets entre eux : d'une part les livres entre eux, d'autre part les feuilles de papier entre elles ?

On s'attend à ce que les élèves proposent :

- pour les bandes : la couleur, la longueur, l'aire, la rigidité, qu'elles ont la même largeur,
- pour les livres : la forme ou taille (grand / petit), l'épaisseur, le poids, l'aire ou la couleur de la couverture, la discipline scolaire à laquelle ils se rapportent.

La figure 2 donne un aperçu des réponses possibles obtenues en 6e :

Bandes de papier	Livres
Longueur	Nombre de pages
Surface	Surface de la couverture
Largeur	Masse
Couleur	Épaisseur
Périmètre	Prix
	consistance
	Périmètre couverture

Obtenu dans une première classe

Bandes de papier	Livres
Longueur	Épaisseur
Formes géométriques	Formes géométriques
Couleurs	Poids
Surface	Surface
	Consistance
Matière	Matière
	Nombre d'arêtes
Largeur	Largeur

Obtenu dans une deuxième classe

Figure 2. – Réponses obtenues dans deux classes de 6e

Une autre possibilité :

En fonction des réactions et difficultés des élèves, on peut décider que cette séance sera uniquement orale et réduire la question génératrice à la forme suivante : « Quelles sont les différences entre tous ces objets ? ». Une telle séance a été menée en s'appuyant sur la présentation de quatre objets (livre épais de vulgarisation des mathématiques, roman de poche, manuel de mathématiques et livret d'exercices accompagnant le manuel).

A l'énoncé des points de différence par les élèves, le professeur les a écrits au tableau, en prenant soin de placer à gauche les grandeurs mathématiques calculables, et à droite toutes les autres. Il en résulte un tableau fortement déséquilibré avec :

- *à gauche, les mots hauteur, épaisseur, longueur, largeur, aire, poids, masse, nombre de mots, nombre de pages, nombre de caractères, volume ;*
- *à droite, les noms d'auteurs, de maison d'édition, les couleurs, les thèmes, l'année d'édition…*

Quelle que soit l'option choisie, ce travail se conclut par :

1. 2. 2. Institutionnalisation locale

Les différents caractères, communs ou pas à ces objets (longueur, aire, couleur, masse, prix, etc.), s'appellent ***des grandeurs.*** Elles varient d'un objet à l'autre ; que ces objets soient de même nature, par exemple l'épaisseur pour des livres, ou de nature différente, par exemple la masse des livres et des bandes de papier.

Et il se prolonge par un travail d'identification de grandeurs sur des exemples évoqués, comme ci-dessous.

Exercices possibles (à étoffer)

Enoncer des grandeurs mathématiques calculables communes :

a) à l'eau et à l'huile
b) à un train et une voiture qui roulent

Document provisoire inachevé m 023

1. 2. 3. Nouvelle première rencontre avec la relation d'ordre attachée à des grandeurs de même espèce et élaboration d'une technique de comparaison

Dans ce cas encore, les élèves ont antérieurement établi un rapport à l'ordre sur certaines grandeurs : « cet enfant est plus grand que cet autre », « cet objet est moins cher dans ce magasin que dans l'autre », etc.

Question cruciale : On va s'intéresser à deux grandeurs seulement : la longueur pour les bandes de papier et le poids pour les livres. Peut-on, sans instrument, ordonner les longueurs des bandes de papier, de la plus petite à la plus grande, et ordonner les poids des livres du plus léger au plus lourd ?

Remarque : En ce qui concerne les bandes de papier de même largeur que nous utilisons dans cette proposition, l'expérience montre que les élèves du cycle 3 ne font pas de confusion entre longueur et aire. On pourra le vérifier par soi-même en classe ou encore, si on craint par avance ce type de confusion, fournir aux élèves des bandes de papier de largeurs différentes.

On s'attend à ce que les élèves demandent une règle pour mesurer la longueur des bandes de papier, autrement dit qu'ils tentent tout de suite une mesure ou qu'ils disent qu'il est impossible de peser les livres sans une balance ; le professeur refuse et rappelle la clause « sans instrument ».
Au bout de quelques temps, certains vont avoir l'idée de disposer les bandes les unes sous ou sur les autres, en alignant l'une de leurs extrémités respectives ; par exemple, celle de gauche. Cette superposition est facilitée par le fait que les bandes de papier ont même largeur, ce qui permet de se concentrer sur la seule grandeur à comparer : la longueur.

Pour les livres, sans balance, il suffit de les soupeser ; ce qui risque de donner matière à de nombreux débats entre élèves puisqu'on ne peut que les comparer deux par deux, pour ensuite parvenir au classement final de l'ensemble des livres.

On peut alors désigner par les lettres de l'alphabet et dans l'ordre croissant ou décroissant les longueurs des bandes de papier que l'on marque sur les bandes elles-mêmes : « longueur *a* », « longueur *b* », etc. Ce qui permet d'écrire : « longueur *a* » < « longueur *b* » ≤ « longueur *c* » < … si on a choisi que les bandes *b* et *c* ont même longueur (le symbole ≤ était auparavant enseigné en primaire, ce qui n'est peut-être plus le cas aujourd'hui car absent du programme. Il faudra donc vérifier s'il est ou non connu des élèves ; sinon, l'enseigner). Ce choix permet ainsi de rencontrer le symbole ≤ pour conserver l'idée d'une suite ordonnée des longueurs dans le cas où deux d'entre elles sont considérées comme égales après que les élèves les ont superposées ; ce qui est le cas dans notre proposition.

De même on peut ordonner les livres selon leurs poids : « poids anglais » < « poids français » < « poids mathématiques » < …

Document provisoire inachevé mars 2025

1. 2. 4. Institutionnalisation locale

Lorsqu'on choisit une ***grandeur*** pour des objets, la ***longueur*** pour les bandes de papier et le ***poids*** pour les livres, il est possible de les comparer en les rangeant dans l'ordre croissant par exemple : de la plus courte à la plus grande longueur des bandes de papier, du plus léger au plus lourd des livres.

On a : « longueur *a* » < « longueur *b* » ≤ « longueur *c* » < …
et « poids anglais » < « poids français » < « poids mathématiques » < …

Nouvelle question cruciale : Si on avait choisi la grandeur « aire » de leur couverture pour les livres, aurait-on obtenu le même classement ?

1. 2. 5. Nouvelle première rencontre avec le rangement par ordre croissant ou décroissant, et ébauche d'une technique

Dans le cas des bandes de papier, la réponse semble simple à donner puisqu'elles ont toutes la même largeur, si on a effectivement distribué des bandes de même largeur.
Dans le cas des livres, donner une réponse est plus difficile selon les types de livres que le professeur a choisis. Par exemple, si l'on compare une revue type du *Science et Vie junior* ou un journal avec un dictionnaire, on trouvera sans doute que le poids de la revue ou du journal est inférieur à celui du dictionnaire, tandis que pour les aires l'ordre change.
Cette remarque pour insister sur le fait que l'on ne compare pas des objets, mais les mêmes espèces de grandeurs attachées à ces objets. Avertissement que met en exergue, dès sa première page, le document d'accompagnement *Grandeurs et mesures* édité par la DGESCO en 2007, lorsqu'il énonce à propos des opérations, mais cela est vrai dès que l'on souhaite utiliser une relation d'ordre :

> qu'il est impossible d'opérer directement sur les objets (comme pourraient le suggérer des expressions très couramment utilisées telles que « le cinquième d'une tarte »), et qu'on ne peut pas faire l'économie des grandeurs, qui sont des abstractions à partir des caractéristiques des objets de la vie courante.

1. 2. 6. Institutionnalisation :

Si on change la grandeur propre à un ensemble d'objets, il est possible que l'ordre change. Par exemple, pour les livres d'un ensemble, si on remplace la grandeur ***« poids »*** par la grandeur ***« aire »*** de leur couverture, on a vu que l'ordre changeait.

Document provisoire inachevé mars 2023

2e séance : la mesure d'une longueur

2. 1. Cadrage mathématique et didactique

Dans cette séance, on ne s'intéresse plus qu'à la grandeur « longueur » à partir de deux segments aux longueurs commensurables L et l. Autrement dit tels qu'il existe une longueur (appelée partie aliquote u) et deux entiers n et m pour lesquels $L = nu$ et $l = mu$. On dira que L mesure n et que l mesure m si on choisit u comme longueur-unité.
Ayant travaillé l'ordre, on demande donc de combien de fois la bande de plus grande longueur est grande relativement à celle de plus petite longueur. On fait alors travailler l'addition des grandeurs et la multiplication par un entier n à l'aide de l'addition itérée.

Comme l'addition répétée de la longueur l (par mise bout à bout des segments de longueur l) ne permet pas d'obtenir la longueur L, il n'existe pas d'entier n tel que $L = nl$. Il apparaît alors nécessaire de choisir une longueur auxiliaire, plus petite que l, en vérifiant si celle-ci permettra d'obtenir L par addition répétée de u. Ce faisant obtiendra-t-on aussi l par addition répétée de u ?
Lors de cette séance, on fait implicitement travailler aussi :

- la soustraction lorsqu'on constate que $4l < L < 5l$
- la division par $n \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'on définit u par $l = 2u$ et donc $u = \frac{1}{2}l$.

Puis, faisant varier la longueur-unité (soit l, soit L), on obtient les mesures rationnelles de l en prenant L pour longueur-unité et de L en prenant l pour longueur-unité : respectivement $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$.

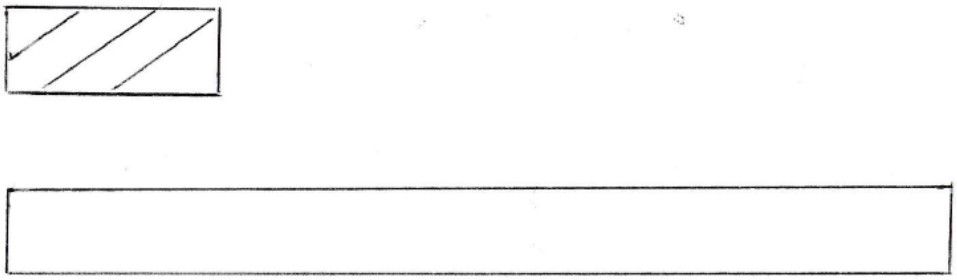
2. 2. Déroulement prévu pour la séance

Les élèves sont de nouveau mis en groupe de quatre ou cinq. Le professeur fait rappeler le travail précédemment mené sur les bandes de papier, notamment les grandeurs de même espèce qui ont été utilisées (longueur et aire) et, le fait qu'ayant choisi une grandeur, on a pu les ranger de la plus courte à la plus longue, ou de celle de plus petite aire à celle de plus grande aire.
Il indique que parmi toutes les grandeurs propres aux objets « bandes de papier », on ***s'intéressera tout d'abord à leur longueur.***

Il distribue alors deux bandes de papier à chaque élève (celles qui sont dans le rapport $\frac{2}{9}$), en indiquant qu'elles viennent de l'ensemble étudié lors de la séance précédente. Il fait rappeler qu'elles ont la même largeur mais que la longueur de l'une est inférieure à celle de l'autre. La question génératrice suivante est évidemment à adapter en fonction de la couleur des bandes considérées.
Pour plus de facilité de lecture on a ci-dessous décidé de les distinguer en « bande blanche » et « bande hachurée ».

Document provisoire inachevé mars 2023

Question génératrice : La longueur de la bande blanche est plus grande que la longueur de la bande hachurée. De combien de fois est-elle plus grande ?



Le professeur indique que, par commodité, on appellera L la longueur de la plus grande et l la longueur de la plus petite.

2. 2. 1. Première rencontre avec le type de tâches « mesurer une longueur » et ébauche d'une technique pour la mesure

Les élèves se servent de leurs connaissances antérieures. La question véhicule implicitement l'idée que l'on recherche un ***nombre entier*** de fois… Commencer de répondre à cette question engage vers une technique additive qui se traduit par une mise bout à bout de bandes hachurées le long de la bande blanche.

Comme il n'y en a qu'une, sans doute les élèves vont reporter la bande hachurée autant de fois que nécessaire en notant chaque fois des marques sur la bande blanche. Mais pour parvenir jusqu'à l'extrémité de la bande blanche, surgit un problème. Les longueurs ont en effet été choisies pour que cet espace mesure la moitié de la longueur l : on a pris $L = 4l + ½\ l$.

Que vont faire les élèves ?

Il est possible qu'ils disent qu'il manque un bout de bande hachurée, que certains disent qu'il y en a entre 4 et 5, qu'il en manque la moitié, voire que certains écrivent 4,5, un des nombres décimaux qu'ils ont rencontrés au CM, etc. Sans doute, après tâtonnements, vont-ils plier la bande hachurée en deux parties égales et constater qu'alors on peut ajouter la moitié de cette bande pour parvenir à l'extrémité de la bande blanche.

Quoi qu'il en soit, ce qui importe est l'impossibilité matériellement constatée de reporter un nombre entier de fois la longueur l pour obtenir la longueur L. Si les élèves disent que $L = 4{,}5l$, cela renforce l'idée que ce nombre entier n'existe pas. Si cela se produit, le professeur indique que l'on reprendra plus tard, et pour l'approfondir, l'étude des nombres comme le nombre 4,5.

Institutionnalisation locale :

On ne trouve pas de nombre entier par lequel multiplier la longueur l pour obtenir la longueur L.

L'échec conduit vers une nouvelle question cruciale nécessitée pour la poursuite de la recherche. Pour amener cette nouvelle question, il est auparavant nécessaire de faire

Document provisoire inachevé mars 2023

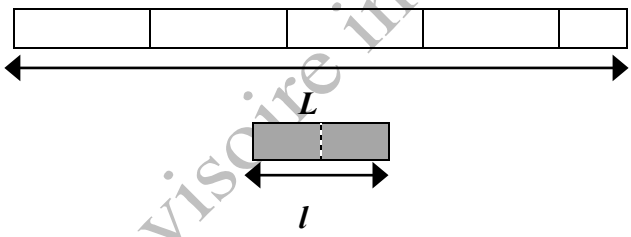
constater la raison de cet échec : la longueur l est trop grande pour recouvrir exactement la bande de longueur L. Ce qui pousse à se demander ce qu'il pourrait advenir si on choisissait de répondre à la question précédente, non pas avec une bande de longueur l, mais avec une autre de longueur plus petite.

2. 2. 2. Construction d'une technique pour mesurer une longueur

Question cruciale : sans utiliser d'instrument de mesure, peut-on trouver combien il faudrait de bandes de longueurs égales mais plus petites que la longueur l pour recouvrir complétement, et sans déborder, la grande bande ?

Il y a de grandes chances que les élèves disent que pour obtenir une longueur plus petite que *l* on peut utiliser « un morceau » de bande hachurée, comme celui-ci en jaune

Ce « morceau » est facilement obtenu en prenant la moitié de la bande hachurée. Sa longueur est la partie aliquote commune à *l* et *L*.
On sait, par ailleurs, que tout diviseur de la partie aliquote convient, mais il est peu probable que les élèves divisent en quarts ou en sixièmes la longueur de la bande hachurée pour obtenir des sous-multiples de la partie aliquote !
Dès que les élèves se sont aperçus qu'il manque une longueur moitié de la longueur *l* pour parvenir à la longueur *L*, le professeur autorise à couper en deux parties égales (superposables) la bande hachurée ; cette dernière étant désormais représentée dans ce texte en gris.



Les élèves reportent la bande jaune, comme le montre la figure 3.

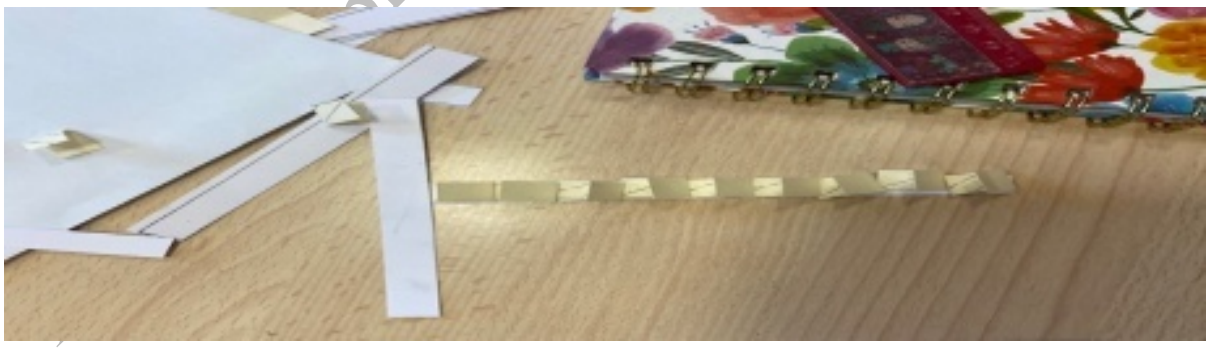


Figure 3. – Report d'une longueur-unité dans une classe de 6e

Les élèves constatent qu'ils peuvent reporter 9 fois la longueur de la bande jaune pour obtenir la longueur *L*.

Une question nouvelle est portée par le professeur : comment écrire le résultat auquel on vient de parvenir avec des lettres, comme on l'a déjà fait pour les lettres l et L ?

Provisoire inachevé mars 2023

*Diverses propositions peuvent venir des élèves. Mais comme ils ne disposent pour l'instant que des lettres l et L, c'est au professeur qu'il revient d'annoncer qu'on va appeler u la longueur de la bande jaune, parce qu'on l'appelle longueur-**unité**, et de demander alors comment écrire l et L « en fonction », si les élèves connaissent cette expression, ou à défaut « en utilisant » u. En effet, l'expression « en fonction de », qui a antérieurement figuré dans le programme de 6e, n'y est plus mentionnée, bien qu'en pratique, mais sans l'utiliser, des élèves rencontrent l'expression et utilisent la notion de fonction, notamment dans les situations et représentations engageant des problèmes de proportionnalité (cf. Repères annuels de progression 6e, mathématiques. Pour l'école de la confiance, BOEN n°22 du 29 mai 2019).*

On s'attend à ce que les élèves écrivent éventuellement :
$L = u + u + u + u + u + u + u + u + u$,
mais plus sûrement $L = 9u$ (éventuellement $9 \times u$, le professeur disant alors que pour simplifier l'écriture, et comme il n'y a pas de risque de confusion, on écrit $9u$ en mathématiques)
et $l = u + u = 2u$ (idem dans la cas d'une écriture $2 \times u$).

Lors de ces moments, et dans le cas où les élèves ne proposent pas les écritures $9u$ et $2u$, expressions d'un rapport à ces écritures qui n'aurait pu être antérieurement construit, c'est au professeur à les ***enseigner***. En tant qu'enseignant, et suivant l'étymologie du mot, il ***indique*** l'écriture « standard », $9u$ et $2u$, adoptée en mathématiques et que les élèves ne peuvent spontanément inventer.

Institutionnalisation :

En prenant pour ***longueur-unité***, notée u, la moitié de la longueur l, on obtient : $l = 2u$ et $L = 9u$.

$l = 2u$ signifie que 2 est le nombre de longueurs-unités u nécessaires pour obtenir la longueur l.
$L = 9u$ signifie que 9 est le nombre longueurs-unités u nécessaires pour obtenir la longueur L.

On dit que ***la longueur l mesure 2 et la longueur L mesure 9 si l'on prend u pour longueur-unité***.

Nouvelle question cruciale : on vient d'écrire l à partir de u, comment écrire u à partir de l ?

Ici encore, il est fort probable que les élèves répètent que « u fait la moitié de l » puisque cela fait partie de l'institutionnalisation qui précède. Mais comment l'écrire ? La fraction « partage », étudiée en primaire, devrait avoir fait associer l'expression « un demi » à l'écriture fractionnaire « $\frac{1}{2}$ ». Cela devrait permettre d'obtenir une égalité de la forme « $u = \frac{1}{2}$ de l » qu'il reste à transformer en $u = \frac{1}{2} l$. C'est un passage délicat à justifier auprès des élèves car, au-delà du passage vers une écriture d'où la préposition « de » est absente, on joue implicitement sur l'équivalence $\frac{1}{2} l = (\frac{1 \times l}{2}) = \frac{l}{2} = l \div 2$.

Document provisoire inachevé mars 2023

Pour construire u à partir de l, il a fallu partager la bande de papier de longueur l en deux parties égales et ne conserver qu'une de ces deux parties. On dit qu'on a divisé l en deux parties égales et qu'on n'en a pris qu'une.

Institutionnalisation

Comme la longueur u est la moitié de la longueur l, on écrit que $u = \frac{1}{2} l$.

$\frac{1}{2}$ est ***la fraction*** qui se dit « un demi ».

Ecrire que $u = \frac{1}{2} l$ signifie que pour obtenir la longueur u à partir de la longueur l, il faut diviser la bande de longueur l en deux parties égales et ne prendre qu'une de ces deux parties.

L'écriture $u = \frac{1}{2} l$ signifie que $\frac{1}{2}$ est le nombre de longueur l prise pour longueur-unité, nécessaire pour obtenir la longueur u.

Exercices possibles (à étoffer)

Ecrire, sous la forme d'une égalité, les déclarations suivantes :

a) Dans une feuille au format A4, on peut placer exactement deux feuilles au format A5. Quelles égalités peut-on écrire entre l'aire S d'une feuille au format A4 et l'aire s d'une feuille au format A5 ?

b) A partir de la phrase de l'institutionnalisation, construire la fraction et vice et versa.

c) Travail des sens de l'équivalence $l = 2u \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} l$.

d) $u = \frac{1}{2} l$ se lit « u est égal à un demi de l » et se construit ainsi : On divise la longueur l en deux longueurs égales, et on prend une de ces nouvelles longueurs

Remarque sur les unités

A partir de ce moment, il semble intéressant, et peut-être plus efficace, dans les expressions du type « un demi de l » de considérer que le « un » désigne la mesure, et le « demi de l » désigne l'unité utilisée. On associe ainsi les fractions à la création d'unités, ce qui permettra de justifier le passage aux fractions décimales.

*Faire la différence entre « **un neuvième** de l » et « **un** neuvième de l" » est essentielle et permet d'éviter beaucoup d'implicites par la suite et, d'une certaine manière, prépare les futurs types de tâches relevant des conversions d'unités de mesure. Nous allons pouvoir le constater dès la question cruciale suivante.*

2. 2. 3. Nouvelle première rencontre avec les fractions et travail de la technique

Question cruciale :

On a obtenu les mesures de l et de L en prenant u comme longueur-unité. Pourrait-on se passer de u ? Autrement dit :

Document provisoire inachevé mars 2023

- ***Pourrait-on obtenir la mesure de L en prenant l comme longueur-unité, donc écrire L à l'aide de l et d'une fraction ?***
- ***Pourrait-on obtenir la mesure de l en prenant L comme longueur-unité, donc écrire l à l'aide de L et d'une fraction ?***

Peut-être le professeur devra-t-il expliciter davantage ces questions. En tout état de cause, on rencontre de nouveau en ce point la nécessité de substituer u par $\frac{1}{2}l$ *ou par* $\frac{1}{9}L$. *Pour faciliter cette substitution, il apparaît nécessaire de manipuler les bandes de papier de longueur u. Cela dans le but de parvenir à convertir cette manipulation en une écriture mathématique ; par exemple, comme indiqué précédemment, en faisant noter sur chacune des bandes de longueur-unité les écritures différentes de cette même longueur :* $\frac{1}{2}l$ *et* $\frac{1}{9}L$.

On s'attend cependant à ce que les élèves parviennent à écrire, en s'aidant pour cela des bandes de papier sur lesquelles figurent les mesures à l'aide des bandes de longueur u :

$l = 2u = \frac{1}{9}L + \frac{1}{9}L = 2 \times \frac{1}{9}L = \frac{2}{9}L$ et

$L = 9u = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l = 9 \times \frac{1}{2}l = \frac{9}{2}l.$

Il apparaît en ce point que, dans les écritures qui précèdent, on s'appuie sur une pseudo-distributivité (pseudo car agissant sur des objets mathématiques de natures différentes : des scalaires, $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{9}$, *et des grandeurs, l et L). En fait, on s'appuie auprès des élèves sur le rapport qu'ils ont antérieurement établi à la définition provisoire de la multiplication étudiée en primaire : une addition réitérée.*

Il se trouve que l'on vient de rencontrer, à cette étape du PER, en mesurant des longueurs et en inter-changeant les longueurs-unités pour l et L, des mesures obtenues sous forme de fractions dont les termes sont inversés ; d'où l'expression de « fractions inverses ».

On a en effet obtenu : $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

Il serait étonnant qu'au moins un élève d'une classe ne remarque cela. Au professeur de reprendre cette remarque pour la porter devant la classe si c'est le cas. Si cela n'est pas remarqué par les élèves, il a le choix de l'indiquer ou non : l'usage de l'inverse d'un nombre n'apparaît en effet qu'en 4e.

Institutionnalisation :

L'écriture $l = \frac{2}{9}L$ signifie que ***l mesure*** $\frac{2}{9}$ ***si on prend L comme longueur-unité***.

L'écriture $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ signifie que ***l mesure 2 si on prend*** $\frac{1}{9}$***L comme longueur-unité***

Nous avons pu constater par l'expérience que les écritures $l = \frac{2}{9}L$ et $l = 2 \times \frac{1}{9}L$ signifient toutes deux que l'on divise la longueur L en 9 longueurs-unités égales et qu'on en prend 2.

Document provisoire inachevé mars 2023

$l = \frac{2}{9}L$ signifie que l mesure $\frac{2}{9}$ si on prend L comme unité

$l = 2 \times \frac{1}{9}L$ signifie que l mesure 2 si on prend $\frac{1}{9}L$ comme unité

Dans les écritures $l = \frac{2}{9}L$ et $l = 2 \times \frac{1}{9}L$:

- 9 est toujours le nombre de parts égales permettant le découpage complet de la longueur L et s'appelle ***le dénominateur ;*** il ***dénomme*** les unités en indiquant le partage d'une grandeur en parts égales
- 2 est le nombre de parts égales permettant de mesurer la longueur l et s'appelle ***le numérateur ;*** il indique le ***nombre*** d'unités nécessaires à la mesure de la longueur l, de même espèce que celle du dénominateur

Numérateur et dénominateur sont les ***termes de la fraction*** $\frac{2}{9}$;

Les fractions $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$ sont dites ***inverses l'une de l'autre.***

Les fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont égaux ***sont égales à 1***. Par exemple : $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{9}{9} = 1$, etc.

Exercices suggérés

Après l'institutionnalisation, ***il faut prévoir de nombreux exercices*** pour travailler les différentes techniques rencontrées :

- Trouver les unités
- Trouver des écritures mathématiques équivalentes du type : $\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l = 2 \times \frac{1}{2}l = \frac{2}{2}l$
- Comparer des fractions de grandeurs ayant des numérateurs égaux ou des dénominateurs égaux
- Construire diverses écritures en rapport avec une phrase donnée, et inversement.

Il semble fondamental en effet de faire jouer les élèves sur au moins trois cadres équivalents : écritures d'une grandeur comme fraction d'une autre ; phrase d'interprétation ; constructions, dessins, schémas… et les faire retrouver deux cadres à partir de la donnée d'un autre.

Lors de premières constructions avec les élèves, ceux-ci ne s'autorisent pas facilement à « inventer » une grandeur pour construire l'autre. En les amenant à le faire, on peut faire remarquer pour une fraction donnée, l'échelle du dessin. Seule la création de la partie aliquote est importante.

Exercices possibles

1. Dans les expressions suivantes, quelles sont les unités qui sont comptées ?
   a) vingt-trois stylos ;
   b) soixante têtes et cent-vingt pieds ;
   c) trois centaines de soldats ;
   d) trente douzaines d'huîtres ;
   e) quinze demi-douzaines d'œufs ;

Document provisoire inachevé mars 2023

f) une demi-heure ;
g) trois quarts d'heure ;
h) trois septièmes de vingt et un centimètres ;
i) deux neuvièmes de la surface de la classe ;
j) sept demi de quarante six personnes.

2. Ecrire, pour chacune des égalités suivantes, la phrase qui permet de l'interpréter.

   $L = \frac{7}{4} l$; $EF = \frac{6}{7} FG$ où EF et FG sont des longueurs de segments ; $s = \frac{2}{9} S$ où s et S sont des mesures d'aires.

3. Ecrire, sous forme mathématique, l'égalité qui est interprétée par chacune des phrases suivantes :
   a) Pour construire la surface d, il faut prendre la surface D, la diviser en 8 parts égales et en prendre 3.
   b) Pour fabriquer l'unité de longueur u, il faut prendre la longueur AB, la diviser en 4 parts égales et en prendre 1.
   c) Si je prends une grandeur G, que je la divise en 7 parts égales et que j'en prends 5, j'obtiendrai la grandeur g.

4. Effectuer, sur cette feuille, les constructions suivantes en utilisant les instruments de géométrie (règle, équerre, compas) selon les besoins.
   a) Construire le segment $[EF]$ tel que $EF = \frac{3}{7} AB$ où $[AB]$ est le segment suivant :

   b) Construire la surface S obtenue en prenant la surface s, en la découpant en 5 parts égales puis en prenant 7 parts. La surface s est la suivante :

Document achevé mars 2023

3e séance : travail sur la commensuration

3. 1. Cadrage mathématique et didactique

Dans cette séance, on travaille une autre manière d'aborder les grandeurs, bien qu'on continue à travailler avec des grandeurs de même espèces : les longueurs l et L. Elles ont été choisies pour que la mesure de l'une, lorsqu'on prend l'autre comme longueur-unité, soit un nombre rationnel. Autrement dit, on travaille pour cette séance la définition des longueurs ***commensurables***.

Rappelons que deux grandeurs G et G' de même espèce sont dites commensurables s'il existe deux entiers naturels n et m tels que : $mG = nG'$. A l'opposé, rappelons aussi l'épisode historique qui a conduit les Grecs à établir que la longueur d de la diagonale du carré n'est pas commensurable à la longueur a du côté. La démonstration actuelle par l'absurde – dans les *Eléments d'Euclide* ce résultat est prouvé par antiphérèse –, établit l'impossibilité de l'existence de deux entiers m et n pour lesquels on puisse avoir $md = na$; plus précisément pour qu'on ait $d^2 = 2a^2$. On dit alors que ces longueurs sont ***incommensurables***.

Avec les bandes de papier précédemment étudiées, aux longueurs l et L choisies commensurables, les élèves sont amenés, par une manipulation qui traduit physiquement la commensuration de ces longueurs, à l'égalité $9l = 2l$.

L'intérêt mathématique de ce travail réside dans la confrontation de cette dernière égalité avec les égalités précédemment trouvées : $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

L'intérêt didactique réside, quant à lui, dans la possibilité de faire débuter, dès cette séance, le travail de la technique consistant à passer du produit au quotient, et vice versa. Ainsi va-t-on faire travailler des techniques d'écriture résumées dans la suite d'équivalences suivantes :

$$l = \frac{2}{9}L \Leftrightarrow 9l = 2L \Leftrightarrow L = \frac{9}{2}l \Leftrightarrow \frac{L}{l} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{L} = \frac{2}{9}.$$

D'expérience, on sait difficile la maîtrise de ces techniques par les élèves. Dans la présente proposition, et à partir des situations d'étude et de recherche basées sur la manipulation effective de bandes de papier de longueurs l et L, on tente ainsi de rendre moins absconse pour les élèves la définition du quotient q de a par b en tant que nombre tel que $bq = a$.

Le professeur distribue dans chaque groupe des bandes de papier de longueur l et d'autres de longueur L. Il lui faut prévoir une vingtaine de bandes de longueur l et quatre ou cinq bandes de longueur L.

Il explique que l'on va continuer à travailler sur les mêmes bandes de papier que lors de la séance précédente. Il peut faire rappeler par les élèves que pour trouver une relation entre les longueurs l et L, il avait fallu précédemment utiliser une longueur-unité plus petite appelée u. Cette longueur-unité avait permis d'écrire deux relations entre l et L à l'aide de deux fractions inverses l'une de l'autre : $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

3. 2. Première rencontre, ébauche d'une technique et exploration du type de tâches dans le cadre de la commensuration

En ce point, on peut envisager de poser l'une ou l'autre des questions génératrices suivantes en fonction du temps investi par les élèves :

Document provisoire inachevé mars 2022

Question génératrice 1 (la plus générale) : Pour obtenir une relation entre l et L, il a fallu utiliser une longueur-unité. Pourrait-on trouver une relation entre l et L, sans utiliser une longueur-unité, notamment sans partager une feuille de longueur l en deux parties égales ?

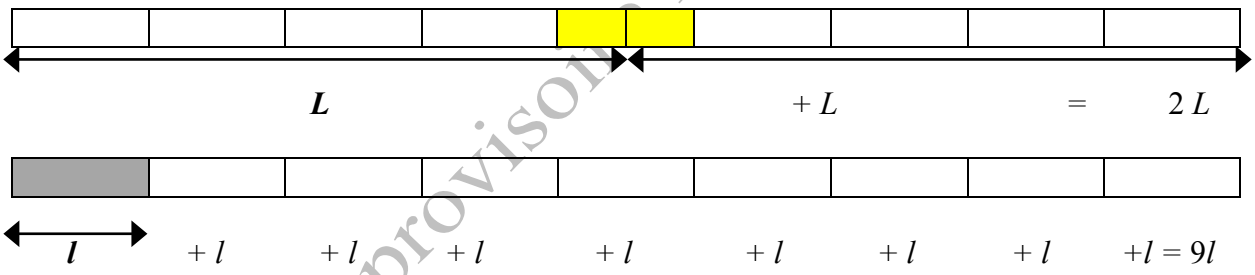
Pour cela, tous les élèves du groupe travaillent ensemble avec les feuilles de longueurs l et L distribuées.

Question génératrice 2 (plus ciblée) : Pour obtenir une relation entre l et L, il a fallu utiliser une longueur-unité : $u = \frac{1}{2}l$ ou $u = \frac{1}{9}L$. Pourrait-on trouver une relation entre l et L, sans utiliser une longueur-unité ? Par exemple peut-on construire deux bandes de papier de même longueur en utilisant pour l'une seulement des bandes de longueur l et pour l'autre seulement des bandes de longueur L ?

Pour cela, tous les élèves du groupe travaillent ensemble avec les feuilles de longueurs l et L distribuées.

Lors de la 2e séance, la preuve expérimentale a été administrée de l'impossibilité d'obtenir une longueur L à partir d'un nombre entier de longueur l. Ce que le professeur peut rappeler dans le cas où quelques-uns voudraient s'engager dans cette voie. Il faudra sans doute photocopier un assez grand nombre de ces bandes de papier afin que les élèves puissent les manipuler sans devoir aller en chercher auprès d'autres camarades.

Ainsi, on obtient :



Ce qui permet de noter : $2L = 9l$.

L'idée qui devrait pouvoir émerger chez les élèves pour résoudre la question posée consiste à prendre, non pas une mais plusieurs bandes de longueur L. Et pour cela commencer avec deux bandes de longueur L.

En effet, les élèves peuvent se douter, même s'ils ne l'expriment pas ainsi, que pour résoudre cette question, il va falloir obtenir un nombre entier de bandes de longueur l dans un multiple de la bande de longueur L (en en mettant un certain nombre bout à bout puisqu'ajouter des longueurs consiste à mettre bout à bout et rectilignement les segments ou les bandes dans ce cas). Il est possible que certains élèves se souviennent que $L = 4{,}5l$ ou encore $4l + 1u$ et que constituer une grande bande avec des bandes de longueur L résoudra la difficulté causée par $0{,}5l = 1u$ en prenant un nombre pair de bandes de longueur L. Or, le premier nombre pair qu'ils vont rencontrer est 2.

La figure 4 montre la réalisation en classe d'une disposition des bandes de papier qui fournit la réponse recherchée.

Document provisoire inachevé mars 2023

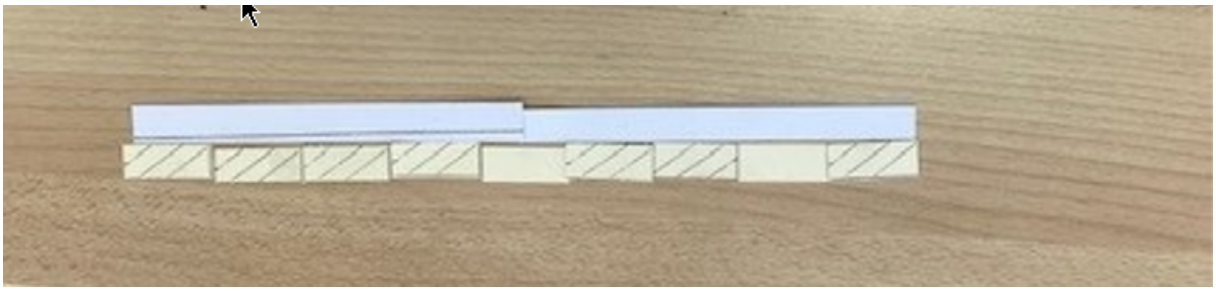


Figure 4. – Réalisation matérielle en classe de 6e de l'égalité $9l = 2l$.

Le professeur fait remarquer que l'on vient de trouver trois égalités portant sur l et L. Les nombres 2, 9, $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$ ne font que traduire ce que l'on a fait avec les bandes de papier, comment on les a disposées, mais on n'a pas changé les longueurs l et L de ces bandes.

3. 3. Au-delà de la réalisation de la tâche précédente, exploration du type de tâches sur plusieurs spécimens et routinisation de la technique

Ce travail peut être organisé hors du temps de la classe. Pour cela, il faut diviser la classe en quatre groupes qui obtiennent chacun, à l'issue de leur travail, quatre égalités différentes pour mL = nl. Ce qui suppose un stock de bandes de papier assez important !
On demande ensuite, en retour en classe et après vérification du travail fait, à un représentant de chaque groupe d'écrire au tableau et sous le contrôle des autres membres de son groupe, l'égalité obtenue avec ses propres bandes de papier. Le travail collectif peut alors s'organiser ensuite pour chacune des égalités afin d'obtenir les écritures fractionnaires des mesures de L et l.

Une fois établi « le phénomène », il semble nécessaire de faire le même travail avec des couples de bandes de papier différents, aboutissant par exemple à $3L = 4l$; $5L = 10l$; $5l = 2L$; etc.
Il s'agit ainsi de s'engager dans une décontextualisation et, par exemple, de constater matériellement que $5L = 10l$ est équivalent à $L = 2l$. On peut alors commencer à faire vivre l'idée de l'équivalence des fractions : ***les égalités écrites avec des nombres ne dépendent pas des nombres, mais des longueurs l et L des bandes de papier et de la disposition de ces bandes de papier, ce qu'indiquent les nombres.***
En même temps que l'on écrit les trois égalités obtenues, commence à vivre la technique qui permet de passer du produit au quotient, de $a = bq$ à $q = \frac{a}{b}$ ou de $bq = a$ à $q = \frac{a}{b}$.

Le professeur distribue un couple de ces bandes, par exemple celui qui correspond à $3L = 4l$. Il dit : « Voici deux bandes de papier de longueurs l et L différentes des précédentes. Vous pouvez constater que la longueur L n'est pas égale à un nombre de fois la longueur l. »

Question cruciale : Peut-on comme précédemment, sans rechercher une longueur-unité qui leur soit commune, construire deux bandes de papier <u>de même longueur</u> en utilisant pour l'une seulement des bandes de longueur l et pour l'autre seulement des bandes de longueur L ? Quelle égalité obtient-on et à quoi est égale l en fonction de L, et L en fonction de l ?

Document provisoire inachevé mars 2023

Une fois distribué le couple tel que $3L = 4l$, on passe aux autres couples $5L = 10l$; $5l = 2L$; $L = 2l$ avec les mêmes questions.

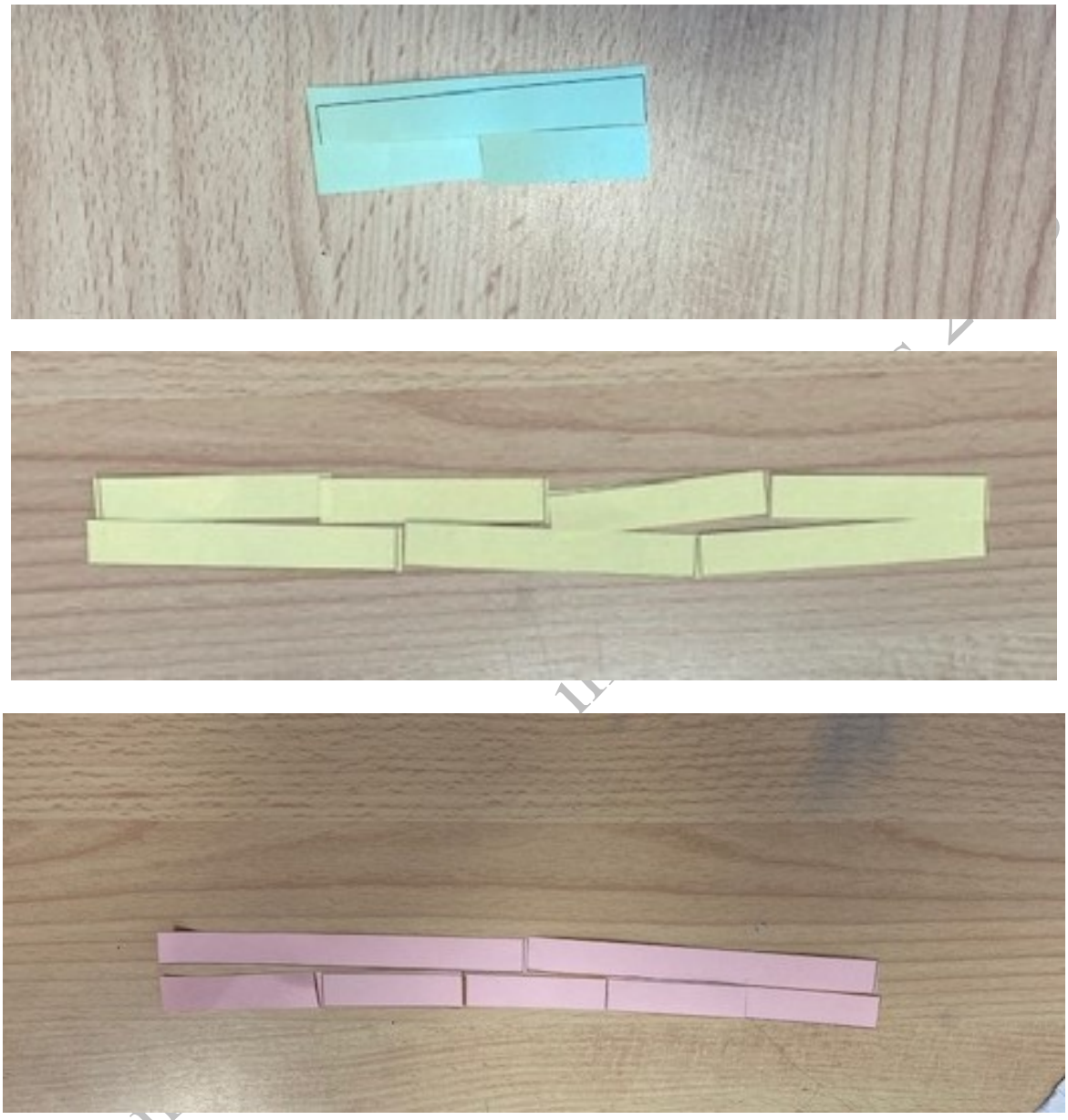


Figure 5. – Réalisation matérielle en classe de 6e des égalités $L = 2l$, $3L = 4l$, $2L = 5l$

Institutionnalisation :

Ecrire $9l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

Ecrire $3L = 4l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{3}{4}L$ et $L = \frac{4}{3}l$.

Ecrire $5L = 10l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{5}{10}L$ et $L = \frac{10}{5}l$.

Remarque : dans ce cas, il a suffi de constater que $L = 2l$

Ecrire $5l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{5}L$ et $L = \frac{5}{2}l$.

3. 4. Travail de la technique

Exercices :

On sait que $l = \frac{2}{9}L$, à quoi est égal $9l$? On sait que $7l = 3L$, à quoi est égal l ? On sait que $7l = 3L$, à quoi est égal L ? On sait que $L = \frac{5}{3}l$ à quoi est égal l ? Etc.

Document provisoire inachevé mars 2023

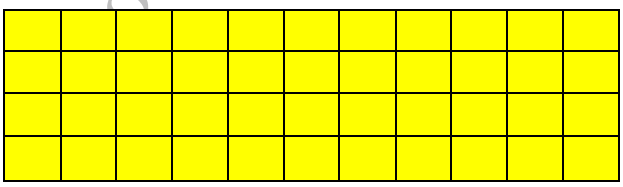
4e séance : un même travail sur une autre grandeur que la longueur

L'exemple que l'on vient de traiter porte sur la grandeur « longueur ». On va rechercher si ce que l'on vient de trouver s'applique aussi à d'autres grandeurs, par exemple à l'aire.

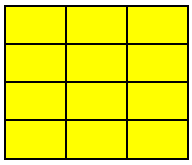
Cette séance réalise un double objectif.
D'une part la question du caractère généraliste de ce qui vient d'être découvert, bien qu'avec une forte dimension locale et limitée à deux grandeurs, y est travaillée : ce que l'on vient d'étudier et d'obtenir sur une certaine grandeur, la longueur, s'applique-t-il à une autre ? D'autre part, il faut du temps et un travail répétitif pour que les techniques, et ce qui les justifie, deviennent routinières et maîtrisées. Il y a ainsi un aspect nouveau dans cette séance, mais en utilisant pour cela des techniques anciennes ; ce qui représente une certaine économie intellectuelle. Des élèves apprécient le travail qui ne consiste pas à se lancer à l'attaque d'une question nouvelle, mais qui permet de « souffler »…

Bien que cette séance ait été effectivement réalisée en classe par des professeurs du groupe didactique, il apparaît qu'elle prend parfois du temps. On peut donc organiser ce qui suit pour un travail mené ***en partie*** *hors classe, qui comme le précédent, donnerait matière à mise en commun et institutionnalisation, une fois réintroduit en classe. Dans le cas où une partie du travail a été réalisé hors classe par les élèves, le professeur* ***doit rediriger l'étude dès la mise en commun*** *; soit, dans ce texte, dès la question cruciale qui suit la figure 6.*
En effet, il s'agit de continuer le travail de la technique qui consiste à passer de $aA = bB$ à $A = \frac{b}{a}B$ et $B = \frac{a}{b}A$. Comme on le comprend, ce travail constitue une première rencontre avec l'usage de la technique s'appuyant sur la définition du quotient : $bq = a \Leftrightarrow q = \frac{a}{b}$. Sa maîtrise par les élèves nécessite du temps et doit être accompagné par le professeur. De son côté, cette proposition fournit un accompagnement mathématique et didactique rigoureux, basé sur les grandeurs et leurs mesures auxquelles les élèves peuvent se référer. Ce support est constitué d'une réalité matérielle sur laquelle ils peuvent agir et qui justifie et explique les raisons de la technique de passage du produit au quotient.

4. 1. Question génératrice : Peut-on dire de combien de fois l'aire B du rectangle ci-dessous est plus grande que l'aire A de l'autre rectangle ?



Aire *B*



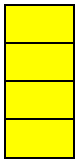
Aire *A*

Il est possible que les élèves choisissent tout d'abord l'aire A comme aire-unité et constatent alors qu'ils échouent et qu'il faut décider d'une aire-unité plus petite.

Document provisoire inachevé mars 2022

Question cruciale : Peut-on trouver une aire-unité afin d'écrire des relations entre A et B telles que celles précédemment établies, notamment en utilisant des fractions ?

Par exemple : si on choisit pour aire-unité l'aire du rectangle ci-dessous :



Alors on a : $B = u + u + u + u + u + u + u + u + u + u = 11u$ et $A = u + u + u = 3u$.
B mesure 11 si on prend u pour aire-unité et A mesure 3 si on prend u pour aire-unité.
La figure 6 montre la rédaction de la synthèse de cette phase rédigée sur un cahier d'élève. Ils ont tout d'abord choisi l'aire A comme aire-unité, constaté qu'ils échouent, ont décidé d'une aire-unité plus petite et l'ont utilisée pour écrire : « aire A = 11 unités d'aire ; aire B = 3 unités d'aire ».

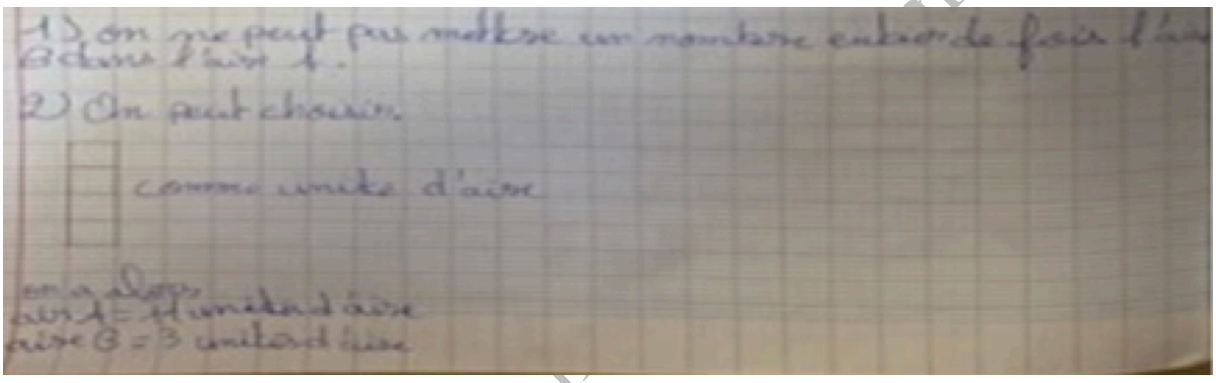


Figure 6. – Choix d'une unité d'aire puis mesures d'aires en classe de 6e

Autrement dit comme $u = \frac{1}{11}B$, on a : $A = \frac{3}{11}B$; comme $u = \frac{1}{3}A$, on a : $B = \frac{11}{3}A$.

Dans le cas où, comme pour ce qui précède, ce sont seulement des relations du type $A = qB$ qui ont été trouvées par les élèves, on pose la question cruciale suivante :

Question cruciale : Combien faudrait-il de rectangles d'aire A et combien faudrait-il de rectangles d'aire B pour obtenir deux rectangles d'aires égales ? (Ou encore, peut-on obtenir une relation du type $a \times A = b \times B$ à partir de $A = \frac{3}{11}B$ ou de $B = \frac{11}{3}A$?)

Il est possible qu'avec des surfaces la manipulation matérielle soit plus délicate qu'avec des segments : il faut superposer un certain nombre de fois la surface d'aire A (11 fois) sur un certain nombre de fois la surface d'aire B (3 fois). C'est encore une fois l'observation en classe qui permettra de le savoir. Si c'est le cas, la réponse obtenue par manipulation de ces objets étant trop coûteuse, alors les élèves s'orienteront vers la transformation des écritures précédemment obtenues : par exemple $A = \frac{3}{11}B$ afin d'écrire $11A = 3B$.

Document provisoire mars 2023

On obtient donc $11A = 3B$ que l'on choisisse d'écrire A en fonction de B ou B en fonction de A.
On a aussi constaté que l'on obtient le même type de relations quelle que soit la grandeur considérée, longueur ou aire. Autrement dit, ***la nature de la grandeur n'intervient pas*** dans la propriété qui permet de passer d'une égalité entre deux grandeurs à deux autres égalités qui expriment l'une des grandeurs en fonction de l'autre à l'aide d'une fraction.

4. 2. Institutionnalisation locale :

Que les grandeurs g et G représentent des longueurs ou des aires, on a toujours trouvé que :
- écrire $9g = 2G$ équivaut à écrire $g = \frac{2}{9}G$ et $G = \frac{9}{2}g$
- écrire $11g = 3G$ équivaut à écrire $g = \frac{3}{11}G$ et $G = \frac{11}{3}g$

Il s'agit de commencer à faire ***travailler la technique*** *qui s'appuie sur* $(b \neq 0 \text{ ; } bq = a) \Leftrightarrow (q = \frac{a}{b})$ *dans le sens direct et aussi dans le sens réciproque, souvent oublié.*

Exercice :
Ecrire des égalités contenant des fractions si : $3g = 2G$; $5g = 4G$; $6G = 2g$; etc. Réécrire des égalités comme celles précédentes si on a $g = \frac{5}{2}G$; $G = \frac{3}{4}g$; etc. ?

Document provisoire inachevé mars 2023

5e séance : l'addition des fractions comme mesures de longueurs

5. 1. Question génératrice : à quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout dont on connaît les longueurs ? Comment faire ?

Il y a des chances que les élèves disent tout simplement qu'il suffit d'ajouter les longueurs. Ils ont raison !
D'où la ***question cruciale suivante :***
A quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout et de longueurs $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$? Et si ces deux segments ont pour longueurs $\frac{9}{2}l$ et $\frac{3}{2}l$?

Les élèves peuvent trouver très simples les réponses : $\frac{7}{9}L$ et $\frac{12}{2}l$. En fait, elles utilisent toutes deux la distributivité de la multiplication externe (les scalaires du type $\frac{a}{b}$) sur les grandeurs (représentées par L et l). D'où la nécessité de faire écrire des calculs qui peuvent paraître triviaux, mais qui ne le sont mathématiquement pas. Il est aussi nécessaire de faire remarquer que $\frac{12}{2}l = 6l$ et, en tant que travail d'une « technique réciproque », de faire décomposer additivement des fractions supérieures à 1. Aussi, dès que les élèves ont donné les réponses pour les longueurs des « segments-somme », leur demander d'écrire leurs calculs. On écrit ainsi :

$$\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L = \frac{2+5}{9}L = \frac{7}{9}L$$

et $\frac{9}{2}l + \frac{3}{2}l = \frac{9+3}{2}l = \frac{12}{2}l.$

En ce point, on peut demander une vérification avec des bandes de papier pour la dernière somme afin d'établir que $\frac{12}{2}l = 6l$. Ce qui atteste, une fois de plus, que la fraction représente un quotient.

De même : $\frac{3}{2}l = \frac{2}{2}l + \frac{1}{2}l = l + \frac{1}{2}l$ d'où l'utilité de savoir qu'une fraction dont les numérateurs et dénominateurs sont égaux est égale à 1 (*cf.* séance 2).

Remarque importante

Le passage des écritures ostensives « $\frac{2}{9}L + \frac{5}{9}L$ » à « $\frac{2+5}{9}L$ » fait appel à un automatisme « pratique » résultant des manipulations et expériences passées. Cette pratique est donc implicite à cette occasion. De ce fait, la raison qui fait qu'on additionne les numérateurs, et non les deux dénominateurs, reste une boîte « grise » voire « noire ».

Document provisoire inachevé mars 2023

Ou alors on considère que dans les écritures $\frac{2}{9}L$ et $\frac{5}{9}L$ l'unité est « le neuvième de L ». Ce qui conduit à utiliser les écritures $2\times\frac{1}{9}L$ et $5\times\frac{1}{9}L$ puis, à nouveau, la distributivité de la multiplication externe sur des grandeurs (représentées cette fois par $\frac{1}{9}L$ ou $\frac{1}{2}L$). On écrit alors : $2\times\frac{1}{9}L+5\times\frac{1}{9}L=(2+5)\times\frac{1}{9}L=7\times\frac{1}{9}L=\frac{7}{9}L$

Cette autre manière de voir les choses permet une justification « praxéologique » (à la fois issue de la pratique, mais aussi visible à travers l'écriture algébrique, et surtout justifiée), du fait que seuls les numérateurs s'additionnent.

5. ***2. Institutionnalisation***

Ce que l'on vient de trouver est vrai pour n'importe quelles fractions de grandeur. Pour ajouter deux fractions de grandeur de même dénominateur, on ajoute entre eux les numérateurs.

Par exemple : $\frac{2}{9}L+\frac{5}{9}L=\frac{2+5}{9}L=\frac{7}{9}L$

5. 3. Travail de la technique

Exercice : Ajouter des longueurs dont les mesures sont des fractions de même dénominateur, décomposer additivement des fractions supérieures à 1 et, notamment, démontrer par le calcul que $\frac{12}{2}l = 6l$, que $\frac{15}{3}l = 5l$, etc.

On peut faire décomposer additivement $\frac{12}{2}l$ et $\frac{15}{3}l$, en faisant apparaître des fractions de numérateurs égaux à 2 et 3 :

On obtient : $\frac{12}{2}l = \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l + \frac{2}{2}l = 6 \times \frac{2}{2}l = l + l + l + l + l + l = 6l.$

Or, $\frac{12}{2}l = \frac{6\times 2}{2}l$ *et on vient de trouver que* $\frac{12}{2}l = 6 \times \frac{2}{2}l$. *Donc* $\frac{6\times 2}{2}l = 6 \times \frac{2}{2}l$.

De même pour $\frac{15}{3}l = \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l + \frac{3}{3}l = 5 \times \frac{3}{3}l = 5l.$

Or, $\frac{15}{3}l = \frac{5\times 3}{3}l$ *et on vient de trouver que* $\frac{15}{3}l = 5 \times \frac{3}{3}l$. *Donc* $\frac{5\times 3}{3}l = 5 \times \frac{3}{3}l$.

On peut tenter de le démontrer, sur un cas particulier, dans le cas où le numérateur n'est pas un multiple du dénominateur, mais ***le calcul est plus délicat*** *car il est guidé par ce que l'on souhaite par avance obtenir. Par exemple :*

$\frac{2\times 5}{9}=\frac{9}{9}+\frac{1}{9}$ *; arrivé en ce point, il faut décomposer additivement $\frac{9}{9}$ pour faire apparaître ce que l'on cherche, à savoir des fractions en $\frac{5}{9}$. Le calcul continue ainsi :*

Document provisoire inachevé mars 2023

$$\frac{2\times 5}{9}=\frac{9}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}+\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{9}+\frac{5}{9}=2\times\frac{5}{9}.$$

Ce type de travail peut être donné à rechercher en travail personnel hors classe.

Question et remarque :

- comment calculer la différence de deux longueurs ?
- ce qui est vrai pour les longueurs est vrai pour les aires et pour n'importe quelle autre grandeur notée *g*. On peut donc calculer de la même manière $\frac{3}{4}g+\frac{7}{4}g$; $\frac{2}{7}g+\frac{6}{7}g$; etc.

Question génératrice : on a vu que les fractions de grandeurs peuvent être ajoutées et soustraites. Peut-on calculer sur des fractions sans les associer à des grandeurs, autrement dit peut-on calculer seulement sur les mesures en ne tenant pas compte des grandeurs ?

Par exemple calculer $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}$; $\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$; etc. ?

Dans ce cas, à quoi serait égal $3\times\frac{7}{4}$ *;* $2\times\frac{3}{5}$ *;* $4\times\frac{2}{3}$ *; etc. ?*

On peut supposer que les élèves s'engageront spontanément dans le produit de l'entier par le numérateur ou, pour ceux qui en doutent, dans l'addition répétée indiquée par l'entier, ou encore dans un retour à la signification de ces produits à l'aide d'une grandeur, par exemple la longueur.

Institutionnalisation :

- Pour ***ajouter ou soustraire*** des fractions de ***même dénominateur***, on ajoute ou soustrait leurs numérateurs.

Exemples : $\frac{2}{7}+\frac{6}{7}=\frac{2+6}{7}=\frac{8}{7}$ et $\frac{12}{5}-\frac{8}{5}=\frac{12-8}{5}=\frac{4}{5}$

- Pour ***multiplier un nombre entier*** par une fraction on multiplie ce nombre par le numérateur de la fraction.

Exemple : $3\times\frac{7}{4}=\frac{3\times 7}{4}=\frac{21}{4}$.

Document provisoire inachevé mars 2023