







PROBLÈME

calculer d. 200 km

Question: Va-t-elle arriver jusqu'à la ville?

ON SAIT QU'ELLE DOIT FAIRE DES RÉSERVES SUR SON TRAJET. ON ESSAIE DE LES POSITIONNER ET SAVOIR LEUR QUANTITÉ

TEST AVEC DES R À DISTANCE ÉGALE

Δ BCP d'allers-retours, BCP de calculs
⇒ PAS LA MEILLEURE STRAT

2^{ème} IDÉE

REMARQUE: si x est la distance au départ, la distance à la ville est 200 - x. On a une réserve n. Quelle distance on parcourt avant de partir? n est

$$x_n = \frac{1}{n+1} \times 200 = \frac{200}{n+1}$$

On exprime x_n en fonction de n

PROG-PYTHON ⇒ DONNE LA DISTANCE TOTALE QU'ON PEUT FAIRE À PARTIR DE N Kg

EX: somme(1/n) + 2/n + 3/n + ... + n/n

ON A N INFINI. PEUT-ON FAIRE KM INFINI? ⇒ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$

ON A $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = +\infty$ & PAS EN BUS

et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ DONC $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = +\infty$

PAR COMPARAISON $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = +\infty$

$n \rightarrow n-1 \rightarrow n-2 \rightarrow n-3 \rightarrow \dots \rightarrow n-n$

$x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + \dots + x_1$

Distance qu'on peut faire à partir de n kg en descendant 1

Distance qu'on peut faire à partir de n-1 kg en descendant 1

On peut faire la somme des x_n

CONCLUSION

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = +\infty$, avec une réserve n de kg infini, la personne pourra attendre la ville à 200 km.

On pourrait se demander quelle réserve n minimale il lui faudrait?

On exprime x_n en fonction de n

$x_n = \frac{1}{n+1} \times 200 = \frac{200}{n+1}$

Le qu'on veut savoir après l'accumulation d'1 seule

$x_{n-1} = \frac{1}{n} \times 200 = \frac{200}{n}$

et $x_n = \frac{1}{n+1} \times 200 = \frac{200}{n+1}$

$x_{n-1} - x_n = \frac{200}{n} - \frac{200}{n+1} = \frac{200}{n(n+1)}$

$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \times 200 = \frac{200}{n(n+1)}$

Distance entre les ordres

Distance entre les ordres

Distance totale entre ordres

Distance totale entre ordres

Conjecture:

- On pense que $D(n)$ est croissant et tend vers l'infini
- La fonction $D(n)$ est croissante en un certain nombre de valeurs positives
- Plus on a de n, plus on a un plus grand?

$D(n) \rightarrow \infty$

Il pourra donc aller aussi loin qu'il le souhaite.

Problème du bus

Problème du bus

PUISSANCES

But $\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2}$

Formule: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Parquet $\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2}$

REGROUPEMENT

But $\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2}$

Observation: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} > \frac{1}{8}$

Parquet: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} > \frac{1}{8}$

SUMMI D INVERSES

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 1 \\
 U_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
 U_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
 &\vdots \\
 U_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de n , U_n est-il un entier?

II. Détermination d'un Dénominateur Commun

P. P. C. M
 ↳ plus ↳ plus ↳ commun ↳ multiple

Ex:
 PPCM₁₀ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
 $= 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 5 = 2520$

PPCM₁₀ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
 $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

I. Premières Observations.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{1} = 1 \\
 U_2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
 U_3 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\
 U_4 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \\
 U_5 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} \\
 U_6 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{49}{20} \\
 U_7 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{368}{420} \\
 U_8 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{761}{280}
 \end{aligned}$$

$U_n = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$

- 3 termes: $U_2 = \frac{3}{2}$
- 4 termes: $U_3 = \frac{11}{6}$, $U_4 = \frac{25}{12}$
- 8 termes: $U_7 = \frac{368}{420}$, $U_8 = \frac{761}{280}$

↳ $2^1 = 2$
 ↳ $2^2 = 4$
 ↳ $2^3 = 8$
 ↳ $2^4 = 16$
 ↳ $2^5 = 32$
 ↳ $2^6 = 64$
 ↳ $2^7 = 128$
 ↳ $2^8 = 256$
 ↳ $2^9 = 512$
 ↳ $2^{10} = 1024$
 ↳ $2^{11} = 2048$
 ↳ $2^{12} = 4096$
 ↳ $2^{13} = 8192$
 ↳ $2^{14} = 16384$
 ↳ $2^{15} = 32768$
 ↳ $2^{16} = 65536$
 ↳ $2^{17} = 131072$
 ↳ $2^{18} = 262144$
 ↳ $2^{19} = 524288$
 ↳ $2^{20} = 1048576$
 ↳ $2^{21} = 2097152$
 ↳ $2^{22} = 4194304$
 ↳ $2^{23} = 8388608$
 ↳ $2^{24} = 16777216$
 ↳ $2^{25} = 33554432$
 ↳ $2^{26} = 67108864$
 ↳ $2^{27} = 134217728$
 ↳ $2^{28} = 268435456$
 ↳ $2^{29} = 536870912$
 ↳ $2^{30} = 1073741824$

III. Parité des Numérateurs & Dénominateurs

$$2^d \leq n < 2^{d+1} \\
 \text{PPCM} = 2^d \times B$$

$\delta = \text{PPCM} = 2^d \times B$ (nombre impair)

Ex: $\frac{1}{2} = \frac{1 \times \delta}{2 \times \delta} = \frac{\delta}{2}$

$\frac{1}{3} = \frac{1 \times \delta}{3 \times \delta} = \frac{\delta}{3}$

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times \delta}{4 \times \delta} = \frac{\delta}{4}$

$\frac{1}{5} = \frac{1 \times \delta}{5 \times \delta} = \frac{\delta}{5}$

$\frac{1}{6} = \frac{1 \times \delta}{6 \times \delta} = \frac{\delta}{6}$

$\frac{1}{7} = \frac{1 \times \delta}{7 \times \delta} = \frac{\delta}{7}$

$\frac{1}{8} = \frac{1 \times \delta}{8 \times \delta} = \frac{\delta}{8}$

- $U_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$, $\delta = 2$, $\frac{\delta}{2} = 1$ pair.
- $U_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\delta = 6$, $\frac{\delta}{2} = 3$ impair, $\frac{\delta}{3} = 2$ pair.
- $U_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\delta = 12$, $\frac{\delta}{2} = 6$ pair, $\frac{\delta}{3} = 4$ pair.
- $U_5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, $\delta = 60$, $\frac{\delta}{2} = 30$ pair, $\frac{\delta}{3} = 20$ pair, $\frac{\delta}{4} = 15$ impair.
- $U_6 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $\delta = 420$, $\frac{\delta}{2} = 210$ pair, $\frac{\delta}{3} = 140$ pair, $\frac{\delta}{4} = 105$ impair, $\frac{\delta}{5} = 84$ pair, $\frac{\delta}{6} = 70$ pair.
- $U_7 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, $\delta = 420$, $\frac{\delta}{2} = 210$ pair, $\frac{\delta}{3} = 140$ pair, $\frac{\delta}{4} = 105$ impair, $\frac{\delta}{5} = 84$ pair, $\frac{\delta}{6} = 70$ pair, $\frac{\delta}{7} = 60$ pair.
- $U_8 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, $\delta = 840$, $\frac{\delta}{2} = 420$ pair, $\frac{\delta}{3} = 280$ pair, $\frac{\delta}{4} = 210$ impair, $\frac{\delta}{5} = 168$ pair, $\frac{\delta}{6} = 140$ pair, $\frac{\delta}{7} = 120$ pair, $\frac{\delta}{8} = 105$ impair.

PAIR + PAIR = PAIR
 IMPAIR + PAIR = IMPAIR
 IMPAIR + IMPAIR = PAIR

PAIR x PAIR = PAIR
 IMPAIR x PAIR = IMPAIR
 IMPAIR x IMPAIR = PAIR

IV. Démonstration du Théorème.

Bien en 2.2:

$$U_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

↳ PAIR / PAIR, PAIR / PAIR, PAIR / PAIR, IMPAIR / PAIR, PAIR / PAIR

$$U_n = \frac{\text{PAIR} + \text{IMPAIR}}{\text{PAIR}}$$

$$U_n = \frac{\text{IMPAIR}}{\text{PAIR}}$$

$\frac{a}{b}$ est un entier si et seulement si b divise a
 Si et seulement si k entier tel que $a = kb$

Conclusion: Un n est pas entier pour tout $n > 2$
 $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall n > 2)$

Le théorème de Torsion (1.5.1.9)
 et
 Le théorème de Krull (1.5.1.10)







