Programmes des UE de mathématiques du portail Descartes et de Licence de mathématiques

29 mars 2024

Table des matières

1 Portail Descartes **2**
- 1.1 Mathématiques générales . . . 2
- 1.2 Études de fonctions et nombres complexes . . . 4
- 1.3 Suites, intégration et systèmes linéaires . . . 6
- 1.4 Arithmétique et raisonnement . . . 8

2 Licence de Mathématiques - S3 **10**
- 2.1 Algèbre linéaire 1 . . . 10
- 2.2 Polynômes . . . 13
- 2.3 Algorithmique et programmation 1 . . . 14
- 2.4 Suites et fonctions d'une variable réelle . . . 15
- 2.5 Épreuve intégrative S3 . . . 18

3 Licence de Mathématiques - S4 **19**
- 3.1 Algèbre linéaire 2 . . . 19
- 3.2 Probabilités . . . 21
- 3.3 Intégration et séries numériques . . . 23
- 3.4 Modélisation . . . 26
- 3.5 Fondements des mathématiques . . . 27
- 3.6 Métiers du décisionnel . . . 29

4 Licence de Mathématiques - Parcours Maths S5 **30**
- 4.1 Espaces euclidiens et géométrie . . . 30
- 4.2 Groupes . . . 31
- 4.3 Épreuve intégrative S5 . . . 32
- 4.4 Fonctions de plusieurs variables et équations différentielles . . . 33
- 4.5 Algorithmique et programmation 2 . . . 35

5 Licence de Mathématiques - Parcours Maths S6 **36**
- 5.1 Groupes et géométrie . . . 36
- 5.2 Histoire et épistémologie des maths . . . 37
- 5.3 Analyse numérique M . . . 39
- 5.4 Séries entières et séries de Fourier . . . 40
- 5.5 Maths en Jeans . . . 42
- 5.6 Chaînes de Markov . . . 43
- 5.7 Statistique inférentielle . . . 44
- 5.8 Anthropocène . . . 45

6 Licence de Mathématiques - Parcours Maths Approfondies S5 **46**
6.1 Algèbre bilinéaire . . . 46
6.2 Théorie des groupes . . . 48
6.3 Suites et séries de fonctions . . . 49
6.4 Équations différentielles . . . 52
6.5 Maths discrètes et algorithmique . . . 54

7 Licence de Mathématiques - Parcours Maths Approfondies S6 **55**
7.1 Structures algébriques . . . 55
7.2 Analyse numérique MA . . . 57
7.3 Épreuve intégrative S6 . . . 58
7.4 Intégration de Lebesgue et calcul différentiel . . . 59
7.5 Topologie . . . 61

8 UE spécifique au CTES **63**
8.1 Algèbre commutative . . . 63

9 UE spécifiques à la double licence Maths-Info **64**
9.1 Probabilités 1 . . . 64
9.2 Probabilités 2 . . . 66

1 Portail Descartes

1.1 Mathématiques générales

(8h de cours en groupes de 40 étudiants, 52h de TD)
Attention : Cette UE se déroule sur 6 semaines, avant les vacances de la Toussaint.

Programme

1. Calcul basique (5h)
   — Calculs sur les entiers (addition, multiplication, divisions posées)
   — Manipulations de fractions (addition, multiplication, division)
   — Manipulations de puissances (entières ou fractionnaires, négatives ou positives)
   — Règles de base du calcul littéral, identités remarquables, formule du binôme en degrés 3 et 4, identité de la série géométrique.
   — Développement et factorisation de polynômes en petit degré, cas du degré 2, lien entre factorisation et racines.
   — Inégalités et intervalles
   — Minimum et maximum d'un ensemble de $\mathbb{R}$
   — Valeurs absolues
2. Raisonnement (25h)
   — Rappel sur l'usage des quantificateurs $\exists$, $\forall$, des symboles $\cup$, $\cap$, $\Leftrightarrow$.
   — Notation des ensembles.
   — Utilisation pour la résolution d'équations et d'inéquations.
   — Résolution des systèmes linéaires à 2 ou 3 inconnues et autant d'équations.
   — Équations de plans et de droites dans le plan et l'espace (équations cartésiennes et représentations paramétriques)
   — En profiter pour faire travailler les raisonnements directs.
3. Calcul avancé (Symboles abréviateurs du calcul) (15h)
   — Symbole $\sum$ pour la somme, pourquoi on peut l'utiliser (associativité).

— Sommes de nombres indicés par les éléments d'un ensemble, par des entiers, comment les interpréter (écriture avec le symbole et écriture développée avec les trois petits points).
— Manipulations : addition de deux sommes, multiplication par une constante, factorisation, changement d'indice.
— Raisonnement par récurrence et utilisation du principe de récurrence pour des calculs de sommes.
— Produit de deux sommes, énoncé de la formule du binôme, somme du série géométrique.
— Le symbole $\prod$ pour le produit, quelques manipulations.

4. Fonctions classiques (15h)
   — Trigonométrie (15h pour ce point et le suivant)
   — Interprétation sur le cercle trigonométrique, dans un triangle rectangle, justification par le théorème de Thalès.
   — Propriétés analytiques admises : périodicité, parité, bornes, domaine de définition, courbes représentative.
   — Formulaire de trigonométrie.
   — Fonction exponentielle et logarithme
   — Exponentielle d'une somme, logarithme d'un produit, réciprocité de ces deux fonctions.
   — Monotonicité, limites usuelles, courbes représentatives.

Compétences

Il faut parfaitement connaître les définitions, les énoncés et les exemples du cours. Au delà de ces connaissances, les étudiants doivent maîtriser un certain nombre de compétences :

— Les étudiants doivent pouvoir effectuer aisément des additions et des produits de fractions de puissances d'entiers, et de fractions rationnelles, et les réduire sous une forme simple quand c'est possible.
— Les étudiants doivent être capables de résoudre des équations faisant intervenir des puissances et des valeurs absolues, quand les équations polynomiales qui interviennent sont de degré ≤ 2 ou ont des racines évidentes.
— Les étudiants doivent savoir résoudre des inégalités faisant intervenir des des puissances et des valeurs absolues, quand les équations polynomiales qui interviennent sont de degré ≤ 2 ou ont des racines évidentes.
— Les étudiants doivent pouvoir résoudre aisément un système d'équations linéaires à 2 ou 3 inconnues.
— Les étudiants doivent pouvoir tracer une droite d'équation donnée sous la forme $ax + by = c$ et, inversement, trouver l'équation d'un droite donnée dans le plan. Idem pour des plans dans l'espace.
— Il faut savoir utiliser les symboles $\sum$ et $\prod$, faire des changements d'indices du type $k \mapsto k+1$ ou $k \mapsto k-1$, ou renverser l'ordre de sommation
— Il faut parfaitement connaître les formules trigonométriques, et connaîtres les valeurs des fonctions trigonométriques en les points 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ et leur translatés d'un multiple entier de π.
— Il faut savoir tracer et reconnaître les graphes des fonctions trigonométriques, logarithme et exponentielle.

1.2 Études de fonctions et nombres complexes

(8h de cours en groupes de 40 étudiants, 52h de TD)
Attention : Cette UE se déroule sur 6 semaines, après les vacances de la Toussaint.

Programme

1. Études de fonctions et dérivation : à peu près 3 semaines (30 heures de cours-TD)
   — Fonctions
      — Définition d'une fonction numérique. Ensemble de définition. *On ne fait pas de distinction entre fonctions et applications ; l'ensemble de définition est a priori donné au préalable, à l'exception de questions spécifiques où on demande de trouver le domaine de définition (maximal).*
      — Graphe d'une fonction, et premiers exemples : exemple de fonctions linéaires, racine carrée, inverse, fonctions trigonométriques (dont tangente), fonction partie entière.
      — Opérations algébriques sur les fonctions : somme, produit, puissance, inverse.
      — Fonctions standard (ensemble de définition, graphes, limites aux bornes) : polynômes (stabilité par somme et produit, unicité des coefficients), fonctions puissances entières, fractions rationnelles (stabilité par somme et produit), fonction valeur absolue (inégalité triangulaire), exponentielle et logarithme, fonction puissance non entière, fonctions trigonométriques, fonction arctangente. *[On ne définit pas les fonctions réciproques en général. La continuité de arctangente est admise.]*
      — Rappels sur les limites : opérations sur les limites, et comparaison entre polynômes, exponentielle et logarithme.
      — Composition de fonctions.
      — Graphes et symétrie : fonctions paires, impaires, périodiques.
      — Image directe d'un ensemble par une fonction. Cas monotone. Cas général dans le cas d'une fonction continue et monotone par morceaux. *Le théorème des valeurs intermédiaires est admis.*
   — Dérivation
      — Définition du nombre dérivé. Forme équivalente avec l'expression issue d'un développement limité à l'ordre 1 *[On ne parlera pas de développement limité en général]*.
      — Cas particuliers de nombres dérivés : fonction linéaire, monôme, inverse, racine carrée, sinus, cosinus, exponentielle, logarithme. *[Le cas de l'exponentielle est tautologique.]*
      — Nombres dérivés d'une somme et d'un produit de fonctions. Nombre dérivé d'une composée de deux fonctions.
      — Fonction dérivée. *[On mentionnera la notation df/dx.]* Dérivée des fonctions usuelles : polynômes, puissances, racine, valeur absolue, fonctions trigonométrique, arctangente, exponentielle, logarithme.
      — Dérivée d'une somme, produit, inverse, composée.
   — Étude de fonctions
      — Définition du maximum, minimum et extremum d'une fonction sur un ensemble. *[On pourra préciser systématiquement l'ensemble sur lequel l'extremum est cherché, afin de ne pas évoquer les termes "local" ou "global".]*. Annulation de la dérivée aux extrema.
      — Lien entre signe de la dérivée et monotonicité de la fonction. *[Les implications "$f' > 0 \implies f$ croissante", etc. seront admises.*
      — Tableau de signe et tableau de variations.
      — Application à la recherche de maximum et de minimum, et à la recherche du nombre de solutions d'une équation.
2. Nombres complexes : à peu près 3 semaines (30 heures de cours-TD)
   — Forme cartésienne
      — Définition. Plan cartésien. Partie réelle et imaginaire. Affixes de points et de vecteurs du plan.
      — Addition. Nombre complexe 0. Affixe d'une somme de deux vecteurs, et de la somme d'un vecteur et d'un point.

- Produit de nombres complexes. Propriétés algébriques (commutativité, associativité, distributivité). Nombre complexe 1. Carré, cube, puissance d'un nombre complexe.
- Nombre complexe conjugué. Propriétés algébriques. Interprétation graphique.
- Module d'un nombre complexe. Calcul à partir de la forme cartésienne. Propriétés algébriques. Interprétation de $|z|$ comme la longueur du vecteur d'affixe z. Développement de $|z+z'|^2$. Inégalité triangulaire.
- Inverse d'un nombre complexe. Propriétés algébriques.
- Racines carrées d'un nombre réel quelconque. Résolution de l'équation quadratique à coefficients réels.

— Forme polaire
- Définition géométrique de l'argument. Détermination de l'argument θ depuis les coordonnées cartésienne, d'abord à l'aide d'un système avec $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$; puis à l'aide de la valeur de $\tan(\theta)$.
- Forme trigonométrique. Unicité. Argument d'un conjugué, d'un produit, d'une puissance, de l'inverse. Formule de Moivre.
- Forme exponentielle. Propriétés algébriques. Formules d'Euler. Exponentielle d'un nombre complexe. Solutions de $e^z = 1$. Expression de la partie réelle, imaginaire, du module et de l'argument de e^z.
- Module et argument d'une somme $z_1 + z_2$ dans le cas où $|z_1| = |z_2|$.

— Nombres complexes et géométrie

— Racines de l'unité. Interprétation géométrique. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle si $n \geq 2$. Racines n-ièmes d'un nombre complexe en général.

Objectifs et attendus

Les étudiants doivent connaître toutes les définitions, énoncés et exemples du cours.

Compétences

— Les étudiants doivent savoir effectuer parfaitement un calcul de dérivée d'une fonction (faisant intervenir des fractions rationnelles, des polynômes, des fonctions trigonométriques, l'exponentielle et le logarithme, ainsi que des produits et composées de ces fonctions).

— Les étudiants doivent être capables de mener une étude de fonction complète de manière autonome, sans questions intermédiaires. On se restreindra à des fonctions relativement simples (comme indiqué dans le programme).

— Les étudiants doivent savoir effectuer aisément des calculs algébriques avec des nombres complexes, et exprimer sous forme cartésienne l'inverse d'un nombre complexe.

— Il faut savoir calculer une racine carrée d'un nombre complexe.

— Les étudiants doivent pouvoir représenter sur la plan cartésien, un nombre complexe z, et savoir interpréter géométriquement ce qu'est son carré, savoir interpréter géométriquement l'addition de 2 nombres complexes.

— Il faut savoir résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.

— Il faut savoir passer de la forme cartésienne à la forme polaire et vice-versa.

— Il faut savoir exprimer les racines n-èmes de l'unité sous forme cartésienne et sous forme polaire.

1.3 Suites, intégration et systèmes linéaires

(12h de cours en amphi de 120 étudiants, 48h de TD)

Compte tenu de la pluridisciplinarité du Portail Descartes, ce cours a pour but d'initier les étudiants à certains outils et techniques de calcul, sans chercher à donner une présentation parfaitement rigoureuse de toutes les notions étudiées. Les preuves seront pour la plupart volontairement omises et repoussées aux cours de L2. Le volume horaire hebdomadaire de cette UE comporte 1h de cours magistral en amphithéâtre réunissant plusieurs groupes d'étudiants et 4h de TD en groupes séparés.

Programme

Ce cours est composé de trois chapitres indépendants.

1. Calcul intégral (4 semaines : 4h de CM et 16h de TD)
   - Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle ouvert. *[L'existence d'une primitive sera admise.]*
   - Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné définie comme « aire sous la courbe ». *[On ne parlera pas de la construction formelle de l'intégrale.]*
   - Théorème fondamental du calcul intégral. *[Énoncé sans preuve.]*
   - Méthodes de calcul de primitive : primitives usuelles, intégration par parties et par changement de variable. *[Des exemples élémentaires de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples pourront être donnés en TD.]*
   - Notion d'équation différentielle.
   - Équations différentielles linéaires d'ordre 1 : équation homogène, équation complète, structure de l'ensemble des solutions, méthode de variation de la constante.
   - éEquations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants : équation homogène, quelques exemples d'équation complète avec second membre particulier.
2. Calcul matriciel et systèmes linéaires (4 semaines : 4h de CM et 16h de TD)
   - Matrices à coefficients réels : addition, multiplication par un scalaire, produit de matrices.
   - Notion de matrice inversible. *[On ne parlera pas du déterminant.]*
   - Algorithme de l'échelonnement d'une matrice : transformations élémentaires sur les lignes, forme échelonnée et échelonnée réduite.
   - Calcul de l'inverse par l'échelonnement. *[Matrices de taille 4x4 maximum.]*
   - Systèmes d'équations linéaires : système homogène, système avec second membre, structure de l'ensemble des solutions.
   - Écriture matricielle d'un système linéaire et résolution par la méthode de l'échelonnement *[Exemples simples de systèmes à paramètre uniquement en TD.]*
   - Description cartésienne et paramétrique d'une droite du plan.
   - Description cartésienne et paramétrique d'une droite et d'un plan de l'espace. *[On se basera sur des notions de calcul vectoriel vues au lycée.]*
3. Suites réelles (4 semaines : 4h de CM et 16h de TD)
   - Notion d'une suite réelle, premiers exemples et propriétés élémentaires : suite monotone, constante, stationnaire, majorée, minorée, suite récurrente, arithmétique, géométrique.
   - Étude de variations d'une suite.
   - Définition formelle de la limite et notion de suite convergente. *[Ce n'est qu'une première approche, un cours détaillé sur le sujet est au programme du semestre 3 en licence math. On présentera des exemples simples qui aident à comprendre la définition. Quelques propriétés élémentaires des suites convergentes seront démontrées sous forme d'exercices en TD.]*
   - Quelques critères de convergence : suite croissante majorée, décroissante minorée, théorème des gendarmes.
   - Sommes, produits et quotients de suites convergentes. *[Une démonstration simple pourra être donnée à titre d'exemple mais on ne démontrera pas tous les résultats.]*

— Calcul de limite d'une suite définie par une expression faisant intervenir des fonctions usuelles : factorisation du terme de plus haut degré, multiplication par le terme conjugué, racine n-ième, théorème de gendarmes.
— Exemples de suites qui satisfont une relation de récurrence linéaire à coefficients constants (on étudiera ce point uniquement sous forme d'exercices en TD, et on se limitera aux récurrences d'ordre 2).

Compétences

Les étudiants devront connaître les définitions des objets présentés en cours ainsi que leurs propriétés élémentaires. Une attention particulière sera portée à la maitrise de techniques de calcul. Les étudiants devront savoir effectuer les tâches suivantes :

— Reconnaître les dérivées usuelles et calculer les primitives correspondantes.
— Effectuer une intégration par parties simple de manière autonome.
— Effectuer un changement de variable simple, le choix de la variable étant indiqué.
— Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 par la méthode de variation de la constante.
— Donner les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

— Effectuer une multiplication de matrices.
— Transformer une matrice en une matrice échelonnée et échelonnée réduite.
— Décider de l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse par l'échelonnement le cas échéant.
— Résoudre un système linéaire par la méthode de l'échelonnement en décrivant proprement son ensemble de solutions.
— Reconnaître une équation de droite ou de plan de l'espace. Passer d'une description cartésienne à une description paramétrique et vice-versa.

— Étudier les variations d'une suite.
— Étudier la convergence d'une suite simple en appliquant les critères étudiés en cours.
— Calculer la limite d'une suite définie par une expression faisant intervenir des fonctions usuelles.
— Étudier la convergence et trouver la limite d'une suite récurrente simple, en particulier en appliquant le raisonnement par récurrence.

1.4 Arithmétique et raisonnement

(12h de cours en groupes de 40 étudiants, 48h de TD dont 12h en demi-groupes)

Programme

L'enseignement de cette UE se fait sur 12 semaines. Il y a une heure de cours par semaine, ainsi de quatre heures de travaux dirigés (dont une heure en demi-groupe). Ce polycopié est fourni aux étudiants en début d'année, et l'enseignant.e va commenter le cours présenté dans ce document pendant les heures de cours.
Ce polycopié est à destination des étudiants. La partie principale doit être travaillée en profondeur, les définitions, les résultats et les exemples doivent être tous connus ; les étudiants doivent être capables de les restituer. Cette première partie est complétée par des remarques et des appendices qui sont à lire dans un deuxième temps, et qui aideront à la compréhension du cours.
Une version plus complète mais plus longue, sera disponible sur Ametice. Cette version contiendra plus d'exemples et les démonstrations des énoncés, et les étudiants pourront aussi s'y référer.
L'enseignant du cours pourra s'appuyer sur ce polycopié pour le commenter avec les étudiants et préciser certains points (en particulier proposer de nouveaux exemples et donner les démonstrations des énoncés qu'il contient).

Le programme de cette UE est donc le suivant :

1. La première partie présente les bases du principe de la démonstration en mathématiques, ainsi que certains des outils nécessaires pour cela : présentation de la démarche axiomatique ; les énoncés comme éléments de langage sur lesquels porteront les démonstrations ; introduction des énoncés sur les cas concrets de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ etc. pour éviter un traitement général trop lourd ou trop imprécis ; formation des énoncés, et en quoi la syntaxe conditionne la méthode de preuve dans les cas les plus simples ; méthodes de preuves plus élaborées, dont les exemples s'appuient sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ etc. ; relations d'ordre dans les cas de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$; le langage ensembliste.
2. La deuxième partie est une introduction à l'arithmétique qui est un premier cadre de mise à l'épreuve des notions exposées précédemment. Trois résultats sont mis en avant : le théorème de la division euclidienne, le théorème de Bezout et le théorème fondamental de l'arithmétique. On introduit aussi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, même si on le définit comme l'ensemble des restes de division euclidienne par n. On montre que cet ensemble est muni de deux lois, l'addition et la multiplication qui satisfont essentiellement les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{Z}$. On étudies les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On finit par une étude des développements des entiers dans différentes bases, et du développement décimal des nombres réels (dans la pratique on se restreindra aux nombres décimaux puis aux nombres rationnels).
3. La dernière partie porte sur la notion d'application ou de fonctions. Les injections, surjections et bijections sont introduites de manière à pouvoir les relier de manière la plus concrète possible avec les problèmes de dénombrement. Ces notions sont ensuite revues dans le cadre de la résolution des équations réelles. Cette partie consiste surtout à faire saisir aux étudiants les notions suivantes : composition, restriction, image directe, image inverse, injection, surjection, bijection, et à travailler les représentations graphiques.
   On applique ces notions à deux choses. D'abord on étudie des questions de dénombrement dans les ensembles finis. Puis on va introduire les fonctions trigonométriques réciproques.

Objectifs et attendus

Les définitions, les résultats et les exemples doivent être tous connus ; les étudiants doivent être capables de les restituer.
L'objectif de ce cours est double : initier les étudiants à la pratique de la démonstration, et apprendre les rudiments de l'arithmétique et de la théorie des applications.

Les étudiants doivent maîtriser un certain nombre de notions présentées dans ce cours :

1. La manipulation des quantificateurs (en particulier savoir nier un énoncé).
2. Les opérations booléennes sur les ensembles.

3. Bien faire la différence entre élément d'un ensemble E et élément de $\mathscr{P}(E)$.
4. La notion d'application doit être maîtrisée : les étudiants doivent être capable de déterminer si une application donnée est injective ou surjective (dans des situations relativement simples où les calculs ne posent pas de difficultés particulières), ou décrire l'image directe ou l'image inverse d'un ensemble par une application.
5. Les étudiants doivent être capable de mener un raisonnement par l'absurde, par contraposée ou par récurrence, quand la méthode à choisir est précisée dans l'énoncé.
6. Les étudiants doivent être capables de mener un raisonnement direct sur des questions d'arithmétique, faisant intervenir les résultats principaux du cours : le théorème de division euclidienne, le théorème de Bezout, les lemmes de Gauss et d'Euclide, le théorème fondamental de l'arithmétique.
7. Les étudiants doivent être à l'aise avec la manipulation de congruences.
8. Les étudiants doivent être capables de tracer le graphe de f^{-1}quand celui de f est donné. Les étudiants doivent être capables de tracer les graphes des fonctions trigonométriques réciproques.

2 Licence de Mathématiques - S3

2.1 Algèbre linéaire 1

(36h de cours en amphi, 54h de TD)

Programme

1. Espaces vectoriels.
   — Définition d'un espace vectoriel (on travaillera sur $\mathbb{R}$ pour l'instant).
   — Exemples : les 3 exemples vus en L1 : l'ensemble des suites qui satisfont une relation récurrence linéaire à coefficients constants ; l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire à coefficients constants ; l'ensemble des solution d'un système d'équations linéaires.
   — On donnera aussi les quatre familles d'exemples d'espaces vectoriels qui sont à connaître : les espaces $\mathbb{R}^n$ de n-uplets de scalaires ; les espaces $\mathbb{R}_d[X]$ de polynômes de degré inférieur ou égal à d et l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$; les espaces $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ de fonctions à valeurs réelles définies sur un ensemble X ; l'espaces $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles comme cas particulier du précédent.
   — Sous-espaces vectoriels ; exemples dans chacune des familles ci-dessus.
2. Familles génératrices et familles libres, bases.
   — Familles génératrices.
   — Familles libres.
   — Bases ; bases canoniques des exemples ci-dessus à l'exception des espaces $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ pour lesquels on peut dire qu'on sait montrer l'existence d'une bases mais qu'on ne peut pas en général l'expliciter.
3. Dimension.
   — Espace de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie). Lemme d'échange de Steinitz (admis), preuve de l'invariance du cardinal d'une base en dimension finie. Définition de la dimension d'un espace vectoriel (en dimension finie). Preuve (en dimension finie toujours) du théorème de la base incomplète, du théorème de la base extraite, de l'existence d'une base et donc de la dimension.
   — Dimension des sous-espaces vectoriels.
   — Application : rang d'une famille de vecteurs.
   — Somme de sous-espaces, espaces en somme directe, décomposition en somme directe, supplémentaire ; Famille finie de sous-espaces en somme directe.
4. Équations de sous-espaces vectoriels.
   — Systèmes d'équations linéaires et retour sur la méthode du pivot de Gauss (introduite au S2).
   — Résolution des systèmes d'équations linéaires homogène.
   — Équations linéaires d'un sous-espace vectoriel donné par une famille génératrice.
   — Le rang d'une famille de vecteurs colonnes et le rang d'un système d'équations linéaires.
5. Applications linéaires.
   — Définition et premières propriétés.
   — Noyau et image d'une application linéaire.
   — Preuve du Théorème du rang. (Espace de départ de dimension finie). Application à la caractérisation des isomorphismes entre 2 espaces vectoriels de même dimension.
   — Composition d'applications linéaires.
   — Quelques applications linéaires fondamentales : homothéties, projections, symétries. Sous-espaces invariants pour ces applications.
   — Des exemples provenant de la géométrie : matrices de rotation en dimension 2 (la notion rigoureuse d'angle et celle d'isométrie sont complètement hors-programme) et matrices de symétrie.
6. Matrices et applications linéaires.
   — Retour sur les matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$; produit matriciel.
   — Transposition ; transposition d'un produit.

— Représentation des applications linéaires par des matrices ; Matrice associée et coordonnées d'un vecteur ; Matrices associées et composition des applications linéaires.
— Changement de base pour les applications linéaires ; reprise des exemples fondamentaux en terme de matrice et de changements de bases tenant compte des sous-espaces invariants.
— Matrices inversibles ; inverse d'un produit ; calcul de l'inverse.
— Le sous-ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$; Matrices semblables.
— Opérations dans $\mathscr{L}(E,F)$, traduction en terme de matrices via l'isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ associé à une paire de bases
— Vocabulaire de la réduction : valeurs et vecteurs propres. Définition de diagonalisabilité pour les matrices et pour les endomorphismes. Exemples.

7. On pourra mentionner que toute la théorie reste valable si on remplace $\mathbb{R}$ par un corps, comme (par exemple) $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$. Les seules conditions nécessaires sont d'avoir une addition et une multiplication qui ont les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}$: commutativité ; tous les éléments ont un inverse pour $+$; tous les éléments non nuls ont un inverse pour $\times$; associativité et distributivité.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Les démonstrations données en cours sont toutes à comprendre. Elles ne sont cependant pas toutes exigibles et l'on distinguera deux niveaux de connaissance attendue :

— Pour les plus simples on peut demander une restitution parfaite comme pour les définitions et énoncés. Il s'agit des démonstrations ne demandant pas un raisonnement en plusieurs étapes ou des applications immédiates de résultats centraux. Par exemple (liste non exhaustive) : la preuve de l'invariance du cardinal d'une base (une fois le Lemme de Steinitz admis), les applications du théorème de la base incomplète ou du théorème du rang, l'équivalence entre les caractérisations d'être en somme directe pour 2 sous-espaces vectoriels, la caractérisation de l'injectivité en terme de noyau.
— Les démonstrations plus complexes (relativement au niveau attendu pour ce cours) ne sont pas directement exigibles, mais les étudiants devraient savoir les retrouver à l'aide de quelques indications. C'est le cas par exemple de la preuve de la base incomplète en dimension finie ou de celle du théorème du rang.

On ne se privera pas de donner des exemples dans des contextes géométriques (faisant intervenir des applications linéaires de rotations, symétrie, projection, etc.) dans les exercices. Les étudiants doivent reconnaître une matrice de rotation dans le plan.

Cette UE est aussi l'occasion de revoir certains connaissances introduites auparavant, en particulier la manipulation des quantificateurs et des ensembles, dans des exercices d'algèbre linéaire. La maîtrise de ces connaissances aura un poids compris entre 10 et 20% de la note finale.

Compétences

Aspects calculatoires L'algorithme du pivot de Gauss doit être parfaitement maîtrisé, de même que son application aux problèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire : en particulier (mais cette liste n'est pas exhaustive) tester la liberté d'une famille de vecteurs, donner une base (ou de manière équivalente une paramétrisation) d'un sous-espace vectoriel décrit par un système d'équations et réciproquement, vérifier l'inversibilité d'une matrice et en calculer l'inverse.

Le lien entre systèmes linéaires et droites ou plans... doit être compris par les étudiants.

Il faut aussi savoir effectuer un changement de base.

Raisonnement Cette UE est une occasion de mettre en pratique dans un cadre nouveau les capacités de raisonnement abstrait acquises dans l'UE "Arithmétique et raisonnement" du portail Descartes.

En particulier il faut savoir appliquer les opérations sur les ensembles aux sous-espaces vectoriels et aux applications linéaires, par exemple on peut demander de rédiger une démonstration rigoureuse du fait que $f(\ker(g\circ f)) = \ker(g)\cap$

$\mathrm{Im}(f)$; ou bien donner et démontrer une inégalité reliant les rangs de deux applications linéaires f et g quand $f \circ g = 0$. Les étudiants doivent aussi être capables de résoudre des problèmes plus complexes, en plusieurs étapes, dans le cadre d'un exercice comportant plusieurs questions.

Voici une liste d'exemples de questions que les étudiants devraient savoir traiter :

1. Savoir calculer un produit de deux matrices de taille $\leq 3 \times 3$ avec des coefficients numériques.
2. Si $A^2 = A + 2I_d$, montrer que A est inversible et trouver son inverse.
3. Donner la matrice (dans les bases canoniques) d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont l'image est engendrée par deux vecteurs donnés.
4. Donner une application linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires telles que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.
6. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Supposons que $\ker f^{k+1} = \ker f^k$ pour un certain entier $k \geq 1$. Montrer que, pour tout $n \geq k$, $\ker f^{n+1} = \ker f^k$.
7. Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tels que $f \circ f = f$.
   i) Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ (indication : pour $x \in E$, considérer la décomposition $x = f(x) - f(x) + x$).
   ii) En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.
8. Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R}), B \in M_{2,2}(\mathbb{R}), C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.
9. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = \begin{pmatrix} \int_0^1 P(t)dt \\ P(0) \\ P'(0) \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base de $\mathbb{R}_2[X]$ et β' la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Donner la matrice $M_{\beta,\beta'}(f)$ de f dans ces deux bases.
   (b) Déterminer le noyau de f.
   (c) Montrer que la famille $\beta'' = (-3X^2 + 1, 3X^2, -\frac{3}{2}X^2 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (d) Trouver la matrice $M_{\beta'',\beta'}(f)$.
10. Montrer que l'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tM + M \in M_n(\mathbb{R})$ est linéaire. Trouver son noyau et son image.

2.2 Polynômes

(12h de cours en amphi, 18h de TD)

Programme

Tous les résultats du cours, sauf mention du contraire, sont à démontrer.

1. Anneau des polynômes et arithmétique des polynômes.
   — Anneau $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit cet anneau, et on précise ses propriétés (qui sont celles d'un anneau commutatif ; mais on ne donne pas la définition générale d'un anneau).
   — Degré d'un polynôme ; degré d'une somme et d'un produit.
   — Division Euclidienne. Preuve de l'existence et de l'unicité.
   — PGCD : existence et unicité (avec preuve).
   — Algorithme d'Euclide pour le calcul d'un PGCD.
   — Théorème de Bezout. Lemme de Gauss.
2. Racines d'un polynôme et factorisation de polynômes.
   — Racines d'un polynôme. Preuve que $P(a) = 0$ ssi $X - a$ divise $P(X)$. Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité en termes de dérivées.
   — Théorème de D'Alembert-Gauss (admis ; on pourra détailler le cas des racines complexes de polynômes quadratiques et le cas de polynômes de degré impair).
   — Polynômes irréductibles.
   — Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Fractions rationnelles.
   — Définition et propriétés.
   — Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ (ne pas énoncer la forme générale du théorème, et ne traiter que des exemples).
   — Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (ne pas énoncer la forme générale du théorème, et ne traiter que des exemples).
   — Étude de fonction et calcul d'intégrales (dans des exercices en particulier).

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Toutes les définitions, le vocabulaire, les exemples et les énoncés mentionnés dans le cours sont à connaître. Il faut savoir les restituer avec des notations différentes.

Toutes les preuves sont à comprendre. Toutes les preuves sont à savoir restituer. Celles-ci ont souvent leur analogue en arithmétique de $\mathbb{Z}$, et revoir le cours de L1 sur le sujet pourra aider.

Compétences

Il faut savoir effectuer un certain nombre de calculs : mettre en place un algorithme d'Euclide, calculer un PGCD, factoriser un polynôme simple, faire un développement en éléments simples d'une fraction rationnelle, l'étudier sur $\mathbb{R}$ et calculer sa primitive sur un intervalle de continuité.

C'est aussi l'occasion de manipuler des nombres complexes. Même si la manipulation de ceux-ci n'est pas explicitement au programme, on attend des étudiants qu'ils maitrisent les attendus de l'UE de L1 "Études de fonctions et nombres complexes", en particulier la manipulation des racines de l'unité (mais il faudra les manipuler en TD pour faire travailler les étudiants dessus).

Mais là encore, il faut aussi être capable de raisonnements plus conceptuels : savoir reconnaître dans une égalité entre polynômes, une division euclidienne ; comme en Algèbre Linéaire 1, il faut être capable de mener un raisonnement formel simple (en une ou deux étapes). Le sujet de cette UE peut être vu comme une continuation du travail effectué dans l'UE de L1 "Arithmétique et démonstrations".

2.3 Algorithmique et programmation 1

(12h de cours en amphi, 6h de TD, 12h de TP)

Cette UE se base sur l'UE de Programmation en Python qui aura été suivie en portail Descartes dont l'objectif est d'utiliser le paradigme de programmation orienté objet, à l'aide du langage Python.

Programme

- Remédiation de méthodologie de la programmation orientée objet en Python (surtout pour les nouveaux entrants)
- Programmation (orientée objets) en Python
  - Gain d'autonomie en programmation orientée objets : écrire soi-même des classes en Python et les utiliser de façon fluide pour structurer du code
  - Utilisation d'exceptions
  - Contrôle de boucles : `continue`, `break`
  - Héritage de classes
  - Surcharge d'opérateurs simples
  - Utilisation des bibliothèques `numpy` et `matplotlib`
- Algorithmique
  - Preuve de correction d'algorithmes
  - Preuve de complexité d'algorithmes
- Algorithmes et programmes permettant d'illustrer les concepts théoriques :
  - Méthode des trapèzes pour un calcul approché d'intégrales sur un segment (utiliser `numpy` pour les subdivision puis visualiser le schéma via `matplotlib`)
  - Écriture d'une classe `Polynome` avec visualisation en `matplolib` et recherche dichotomique pour le zéro d'une fonction polynomiale (évoquer les problèmes de convergence éventuels dus à des approximations flottantes)
  - Algorithme de multiplication matricielle avec sa complexité
  - Algorithmes d'élévation à la puissance (dont l'exponentiation rapide et sa complexité)
  - Intersection de deux courbes (à nouveau, évoquer les problèmes d'approximation flottante)

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Ce cours est l'occasion de réaliser de la différenciation pédagogique puisqu'il faudra composer avec des étudiants ayant suivi le cours de portail Descartes de programmation orientée objets (en Java pour les étudiants de L2 en 2024-2025, puis en Python ensuite), alors que les étudiants provenant d'autres L1 n'en auront vraisemblablement pas vu. Il est donc important de prévoir des feuilles de TD/TP adaptées au niveau de chacun pour assurer une progression de toutes et tous. Les exemples d'algorithmes et programmes cités plus haut sont une liste non exhaustive d'idées permettant d'illustrer les concepts de programmation et d'algorithmique à appréhender.

Compétences

À la fin du cours, on s'attend à ce que les étudiants validant le cours soient en mesure de :

- programmer un algorithme en Python avec structuration en classes
- convaincre de la correction d'un algorithme simple
- estimer la complexité d'un algorithme simple
- faire preuve d'esprit critique sur les erreurs d'approximation flottante inhérente au calcul numérique
- comparer deux algorithmes réalisant la même tâche pour choisir le meilleur selon les cas
- utiliser les bibliothèques `numpy` et `matplotlib` pour réaliser des calculs et visualiser des courbes

2.4 Suites et fonctions d'une variable réelle

(36h de cours en amphi, 54h de TD)

Programme

1. Propriétés de $\mathbb{R}$: 1 semaine (3h CM, 6h TD) :
   — Rappels sur la définition du maximum et du minimum d'un ensemble.
   Les notions de min et max ont été étudiées en détails en S1 Descartes. Il ne s'agit là que de rappels qui peuvent également être donnés sous forme de fascicule si besoin.
   — Borne supérieure, Borne inférieure : Définition comme "le plus petit des majorants" et caractérisation avec les assertions, lien borne sup et max, borne inf et min. Existence pour les ensembles non vides bornés de $\mathbb{R}$. Caractérisation de la borne supérieure avec des ε.
   L'existence des bornes sup et inf est pris comme axiome. La définition d'une borne sup/inf pour un ensemble ordonné quelconque a été introduite au S2 Descartes dans l'UE Arithmétique et Raisonnement mais très peu d'exercices ont été faits. Les suites ont été vues au S2 Descartes dans l'UE Suites, systèmes linéaires et intégration sous la forme du calculus et peuvent donc être utilisées ici.
   — $\mathbb{R}$ est archimédien : démonstration à l'aide des bornes sup et inf.
   — Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: Interprétation de $|x-x_0|<\varepsilon$ en terme de distance entre deux nombres sur la droite réelle, définition de la densité d'un ensemble dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ avec approximation à ε près, intersection avec un intervalle ouvert non vide et caractérisation séquentielle. Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Suites : 3 semaines (9h CM, 12h TD)
   Attention, les suites ont été traitées au S2 Descartes sous leur aspect calculatoire.
   — Définition d'une suite, d'une suite monotone, bornée, tronquée, stationnaire.
   — Définition de la limite : Définition d'une suite convergente ou divergente. Limites finies et infinies. Unicité de la limite.
   — Propriété : toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques sur les limites. Caractérisation séquentielle de la borne sup : "$a=\sup A$ ssi a majorant et il existe une suite de A qui tend vers a". "Toute suite croissante majorée est convergente". Les suites adjacentes. Application au théorème des segments emboîtés.
   Ces définitions et premières propriétés ont été déjà vues au S2 dans l'UE Suites, systèmes linéaires et intégration sous l'aspect plus calculatoire. Ici, il s'agit de passer rapidement sur le cours et d'insister en exo sur les démonstrations des propriétés simples avec les ε.
   — Limite et inégalité : "Si (u_n) converge vers $\ell>k$, alors $u_n\geq k$ à partir d'un certain rang". Théorème des gendarmes, théorème de passage à la limite. Application : Si $(u_n)\in[a,b]$ converge vers ℓ, alors $\ell\in[a,b]$.
   Ces notions auront été survolées au S2 Descartes dans l'UE Suite, systèmes linéaires et intégration. Ici, il est important d'insister sur cette partie et sur tous les exercices qui font appel à ces propriétés jusqu'à ce que les étudiants acquièrent des réflexes sur la manipulation des limites avec les inégalités.
   — Suites extraites : Définition, exemple avec $(u_n)_{n\geq n_0}$, (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Définition d'une valeur d'adhérence. "Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente". Utilisation pour montrer qu'une suite est divergente. Idem pour des suites qui tendent vers $\pm\infty$.
   La notion de suite extraite est difficile pour les étudiants, mais c'est une notion qui doit être maîtrisée à la fin de cette UE. Il faudra donc faire beaucoup d'exercices variés sur le sujet.
   — Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par les segments emboîtés.
   — Relation de négligeabilité, d'équivalence et de domination. On introduira les notations $o(u_n)$ et $\varepsilon_n u_n$ et on donnera les définitions pour des suites qui peuvent s'annuler. Comparaison de suites usuelles : logarithme, puissance, exponentielle et factorielle.
   Les étudiants doivent connaître ces notations mais la notion permettra surtout de "refaire" de nombreux exercices sur les limites. Les résultats du cours doivent rester très basiques et ne pas prendre trop de temps.
   — *S'il reste du temps :* Extension des définitions aux suites de $\mathbb{C}$ et éventuellement quelques exercices sur le sujet.
3. Fonctions continues : 4 semaines (12h CM, 18h TD)

— Définition du voisinage d'un point, de l'infini. Définition d'un ouvert de $\mathbb{R}$. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}$.
L'introduction de ces notions permet de raccourcir plusieurs énoncés mais aucun exercice centré sur ces notions ne sera proposé à ce semestre.

— Définition d'une limite en un point ou à l'infini. Limite à droite et limite à gauche. Unicité de la limite. "$\lim_a f > k \Rightarrow f > k$ au voisinage de a".
On pourra introduire la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mais en faisant attention à ne pas mélanger avec la notion d'adhérence.

— Caractérisation de la limite d'une fonction à l'aide des suites. Opérations algébriques sur les limites, théorème des gendarmes, passage à la limite avec des inégalités larges, théorème de la limite monotone, limites de fonctions composées.
Les propriétés ci-dessus peuvent être démontrées rapidement grâce à la caractérisation par les suites et ces mêmes propriétés pour les suites mais dans ce cas, il est conseillé de faire des démonstration avec les ε en exercice.

— Relation de négligeabilité, relation d'équivalence et relation de domination. Comparaison des fonctions usuelles : puissances, logarithme, exponentielle.

— Fonctions continues : définition et caractérisation séquentielle ; continuité à droite et à gauche. Applications immédiates de la continuité : étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et convergence vers un point fixe de f ; "Si $f(a) > 0$ et f continue, alors $f > 0$ au voisinage de a".
On pourra parler de fonctions k-lipschitziennes et de leur continuité en exercice mais la connaissance de la définition n'est pas exigible en examen.

— Opérations algébriques et continuité. Valeur absolue et continuité. Composition et continuité.

— Prolongement par continuité. Application au sinus cardinal. Deux fonctions continues coïncidant sur un ensemble dense sont égales.

— Théorème des valeurs intermédiaires. Démonstration par les segments emboîtés. "L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".

— Théorème de Weierstrass : "Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes". "L'image d'un segment par une fonction continue est un segment". Application : "Une fonction continue et strictement positive sur un segment est minorée par une constante strictement positive."

— Théorème de la bijection. Contre-exemple si la fonction n'est pas définie sur un intervalle. Application à la définition de la racine et des fonctions trigonométriques réciproques.
Attention, ces fonctions auront déjà été vues en L1 Descartes mais simplement dans leur aspect calculatoire.

— *Eventuellement si le temps le permet :* Uniforme continuité : définition. Théorème de Heine.

4. Fonctions dérivables : 4 semaines (12h CM, 18h TD)

— Définition du taux d'accroissement. Définition de la dérivée en un point d'un intervalle ouvert et de la fonction dérivée comme limite du taux d'accroissement. Notation f' et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. On utilisera la notation f' dans le reste du cours. Formule de Taylor d'ordre 1 et interprétation géométrique avec la tangente. Dérivée à droite et à gauche. Calcul de la dérivée de fonctions classiques : carré, inverse, racine, sinus, cosinus, exponentielle et logarithme. "Toute fonction dérivable est continue". "Si f est constante (resp. croissante, ...), alors f' est nulle (resp. positive, ...)".
Attention, ces notions ont été traitées au S1 Descartes dans l'UE Étude de fonction et nombres complexes.

— Opérations algébriques et dérivée. Dérivée d'un monôme. Formule de la dérivée d'une composée. Dérivée d'une bijection réciproque. Dérivée des fonctions puissance (puissances réelles).
Attention, ces notions ont généralement été traitées au S1 Descartes dans l'UE Étude de fonction et nombres complexes sauf la dérivée d'une bijection réciproque.

— Dérivées successives. Formule de Leibnitz. Définition des classes de fonctions $\mathscr{C}^k(I)$. Stabilité par opérations algébriques et composée.

— Définition d'un extremum local et global. Annulation de la dérivée en un extremum local. Lien dérivée seconde et extrema locaux. Exemples de recherche d'extrema locaux.
Attention, la notion d'extrema global a été traitée au S1 Descartes dans l'UE Étude de fonction et nombres

complexes, mais pas la notion d'extrema local ni le lien avec les dérivées secondes.

— Théorème de Rolle : énoncé, démonstration et contre-exemple si l'une des hypothèses est fausse.

— Théorème des accroissements finis. Inégalité des accroissement finis. Une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne. Théorème sur le signe de la dérivée et la monotonie. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

— Fonction convexe. Définition. Caractérisation des fonctions dérivables convexes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Ce paragraphe sur les fonctions convexes doit être rapide. Le but est de maîtriser la définition et de savoir montrer si une fonction est convexe en dérivant deux fois mais la manipulation des différentes inégalités de pentes sera faite simplement en exercice si besoin.

— Développements limités. Définition et introduction de l'abréviation DL. Exemple de la fonction $\frac{1}{1-x}$. Formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young. Existence de DL à l'ordre n pour les fonctions $\mathscr{C}^n$. Sommes et produits de DL. Composition de DL. Intégration de DL.

On insistera surtout sur le calcul plus que sur l'énoncé.

— Extension aux fonctions à valeurs complexes en particulier l'exponentielle ?

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Les définitions, exemples et énoncés de propositions et théorèmes doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).
Les démonstrations données en cours sont toutes à comprendre. Elles ne sont cependant pas exigibles.

Compétences

1. Il est important que les étudiants comprennent bien l'équivalence entre les propriétés énoncées pour tout $\varepsilon > 0$ et la construction de suites qui vérifient les propriétés avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
2. A la fin du chapitre sur les bornes inf et borne sup, les étudiants doivent être capables de traiter un exercice du type $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ seul.
3. A la fin du chapitre sur les suites, les étudiants doivent être capables par eux-mêmes de traiter des exercices du type "Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 1$, alors u_n tend vers 0" ou "Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors (u_n) converge", ou avec éventuellement une question intermédiaire pour les guider.
4. Les étudiants doivent être capables de calculer très rapidement des DL de fonctions simples à de petits ordres. Par exemple, obtenir le DL en 0 et à l'ordre 3 d'une fonction du type $\ln(1+\sin(x))$ doit être très rapide. En revanche, il est inutile de savoir calculer des DL à l'ordre 6 ou 7 de fonctions très techniques où les différents termes se compensent et qui n'apparaissent jamais en pratique.
5. Les étudiants doivent être capables de manipuler la définition de limite dans des cas relativement simples. Par exemple, être capable de montrer que, si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ', alors $(2u_n - v_n)$ converge vers $2\ell - \ell'$. Ou être capable de montrer que si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues respectivement en x et $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue au point x.
6. La manipulation des quantificateurs est un point fondamental à évaluer dans cette UE.

2.5 Épreuve intégrative S3

(3h de cours en amphi, 18h de TD, 1h de pédagogie active (PA) par groupes de 3 étudiants)

Programme

Il s'agit de proposer plusieurs épreuves écrites longues présentées sous la forme de problèmes, portant sur le contenu des UE de L1, avec pour chacune une remédiation approfondie. L'UE consiste en quatre épreuves écrites de 2 heures chacune réparties sur le semestre, précédées en début de semestre par 3h de CM pour présenter l'UE, donner des conseils pour aborder ce type d'épreuve écrite, des conseils de rédaction mathématique, ainsi que des rappels mathématiques nécessaires aux quatre épreuves.

Pour chacune des quatre épreuves écrites, l'enseignant.e rédigera un corrigé du sujet qui sera distribué aux étudiant.e.s à l'issue de l'épreuve, corrigera ensuite les copies, puis proposera des séances de remédiation sous plusieurs formes :

- une séance collective de TD portant sur les erreurs les plus fréquentes des étudiant.e.s, développant au tableau la correction de certaines questions et donnant aussi éventuellement quelques compléments qui pourraient s'avérer nécessaires.
- Des séances de remédiation en petits groupes d'étudiants, voire des retours individuels, qui permettront d'analyser en détail chaque copie et d'indiquer précisément à l'étudiant.e les points à améliorer dans son travail.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Le programme des épreuves doit concerner des notions de base acquises en L1, en particulier :

1. Les études de fonctions
2. Les études de suites
3. l'arithmétique élémentaire
4. l'utilisation des quantificateurs
5. les opérations booléennes sur les ensembles et sur les applications
6. le raisonnement par récurrence

L'objectif principal de cette UE est de travailler la rédaction mathématique. Les retours individualisés permettront aux étudiant.e.s d'améliorer significativement leur niveau de rédaction. Une attention particulière sera donc donnée à la qualité de la rédaction, mais l'UE sera aussi évaluée sur la maîtrise des notions mathématiques de base acquises en L1, en particulier celles mentionnées ci-dessus.

Compétences

- La maîtrise de l'utilisation des quantificateurs, des opérations booléennes sur les ensembles et sur les applications, ainsi que du raisonnement par récurrence ;
- L'aptitude à rédiger des démonstrations mathématiques claires, rigoureuses et précises.

3 Licence de Mathématiques - S4

3.1 Algèbre linéaire 2

(36h de cours en amphi, 54h de TD)

Programme Partie 1 : Déterminants (2 à 3 semaines)

1. Déterminant de matrices 2×2 et 3×3 : formule dans le premier cas ou développement par rapport à une ligne ou colonne dans le second. Lien avec l'aire des parallélogrammes (à démontrer) et le volume des parallélépipèdes (admis).
2. Déterminant de matrices $n \times n$, cas général (il est important de traiter ce cas après les cas $n = 2$ et 3).
   — Définition par récurrence (développement par rapport à la première colonne)
   — Propriétés (on peut suivre l'ouvrage de J.-P. Escofier, *Toute l'algèbre pour la licence* (Dunod 2020)) :
   (a) Le déterminant change de signe quand on permute deux colonnes (admis). On en déduit les propriétés qui suivent.
   (b) Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.
   (c) Le déterminant est multilinéaire.
   (d) Déterminant de matrices diagonales et diagonales par blocs.
   (e) Si n vecteurs sont linéairement indépendants, leur déterminant est nul.
   (f) le déterminant de la transposée d'une matrice est égale au déterminant de la matrice (admis).
   (g) Développement d'une matrice par rapport à une ligne ou une colonne quelconque.
3. Déterminant d'applications linéaires. Invariance par changement de base.
4. Déterminant d'une famille de vecteur par rapport à une base ; application : orientation (surtout en dim 2 et 3).

Partie 2 : Réduction des endomorphismes (9 à 10 semaines) Dans la suite f désignera toujours un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Rappels du S1 : Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme et d'une matrice ; sous-espaces stables d'un endomorphisme ; sous-espaces propres ; sommes directes.
2. Étude d'exemples élémentaires : symétries, projection et rotation dans le plan ; exemples en dimension 3 ; projections en dimension n quelconque.
3. Polynôme caractéristique ; propriétés, lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristiques, coefficients du polynôme caractéristique.
4. Deux résultats : Si d désigne la restriction d'un endomorphisme f à un sous-espaces stable, le polynôme caractéristique de g divise celui de f ; Si f est nilpotent, alors son polynôme caractéristique vaut $(-1)^n X^n$.
5. Endomorphisme diagonalisable ; Soit f endomorphisme de E. Alors : f est diagonalisable ssi $\mathrm{Mat}(f)_B$ est diagonale pour B bien choisie ssi E est la somme directe des espaces propres de f ssi la somme des dimension des espaces propres vaut $\dim(E)$.
   Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable ; quelques exemples ; multiplicité d'une racine du polynôme caractéristique et lien avec la dimension des espaces propres.
6. Critère de diagonalisabilité : f est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et les multiplicité de ses racines sont égales aux dimension des espaces propres associés.
7. Trigonalisation : définition pour un endomorphisme et pour une matrice ; A est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.
8. Théorème de Cayley-Hamilton (on le démontre en travaillant sur $\mathbb{C}$ et en trigonalisant la matrice. Pour une matrice triangulaire supérieure, la preuve se fait aisément).

9. Polynômes d'endomorphismes. Définition de $P(f)$ quand f est un endomorphisme et P un polynôme. Quelques propriétés des polynômes en f. Le morphisme $\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[f]$ qui envoie P sur $P(f)$ est essentiel, mais on n'a pas les outils pour le traiter maintenant, donc on en parle pas. Par contre on peut définir la notion de polynôme annulateur, et montrer qu'il en existe un unique de plus petit degré à l'aide de la division euclidienne. Le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas au programme (ce sera au programme de la L3).
10. Applications : équations différentielles linéaires à coefficients constants, et suites définies par récurrences linéaires à coefficients constants.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Les démonstrations sont toutes à comprendre. Il faut savoir les restituer sauf les suivantes : les critères de diagonalisabilité et triogonalisabilité, le théorème de Cayley-Hamilton (mais cela sera précisé par l'enseignant).

Compétences

Aspects calculatoires Il faut savoir calculer sans difficulté un déterminant ou un polynôme caractéristique d'une matrice de taille 3×3 maximum (cela n'empêche pas de savoir calculer un déterminant particulier de taille plus grande).

Lorsque les racines du polynôme caractéristique sont connues il faut savoir calculer les espaces propres associés (on se limitera à des valeurs propres rationnelles et à quelques autres exemples simples (par exemple imaginaire pures). Il faut savoir reconnaître une matrice non-diagonalisable quand le polynôme caractéristique est scindé.

Raisonnement Les remarques faites dans l'UE d'algèbre linéaire 1 du S3 s'appliquent aussi à la présente. Celle-ci sera aussi l'occasion de confirmer la bonne acquisition des notions vues dans l'UE Algèbre linéaire 1 (en particulier famille libre, famille génératrice, somme directe, dimension), ainsi que dans l'UE de polynômes.

Voici quelques exemples de questions que les étudiants devraient savoir traiter (et qui permettent de situer le niveau attendu) :

1. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. Montrer que c'est égal à $P(1)P(j)P(j^2)$ où $P(X) = a + bX + cX^2$.
2. On considère l'application linéaire f donnée par
$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$
   (a) Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.
   (b) Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) Écrire la matrice de l'application linéaire dans cette base.
3. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $\Phi : E \to E$ définie par
$$\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$
   (a) Montrer que Φ est bien définie et est une application linéaire.
   (b) Donner la matrice de Φ dans la base canonique.
   (c) Montrer que Φ est diagonalisable.
4. Si A et B sont deux matrices carrées de même taille, montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

3.2 Probabilités

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

1. Quelques rappels sur les ensembles.
   — Union, intersection d'ensembles et propriété de distributivité. Complémentaire d'un ensemble.
   — Injections, surjections, bijections. Image réciproque d'un ensemble par une application.
   — Ensembles finis et infinis, dénombrabilité d'un ensemble infini.
   — Parties d'un ensemble. Quelques résultats combinatoires (permutation, arrangement, combinaison). Formule du binôme de Newton.
2. Espace probabilisé `discret`.
   — Univers Ω, événements, mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
   — Propriétés élémentaires des mesures de probabilité, continuité croissante des mesures. Formule du crible.
   — Premières modélisations : lancer d'une ou plusieurs pièces, de dés, etc.
3. Probabilités conditionnelles.
   — Définition de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$.
   — Formule des probabilités composées.
   — Formule de Bayes pour deux événements.
   — Systèmes complets d'événements, formule des probabilités totales. Arbre de probabilité.
   — Indépendance de deux événements, d'une famille d'événements.
4. Variables aléatoires discrètes.
   — Définition. Evénement $[X \in A]$, lorsque A est un ensemble discret.
   — Loi d'une v.a. discrète. Exemple de deux v.a. différentes ayant la même loi.
   — Quelques lois usuelles : uniforme, Bernoulli (indicatrice d'un événement), binomiale, de Poisson, géométrique.
   — Espérance d'une v.a. discrète : définition, exemples, propriétés.
   — Théorème de transfert.
   — Variance d'une v.a. : définition, exemples, propriétés.
   — Fonction de répartition : définition, exemples. Propriétés, caractérisation de la loi.
   — Indépendance de deux v.a. discrètes, d'une famille de v.a. discrètes.
   — Somme de v.a. indépendantes. Exemple des binomiales.
   — Fonction génératrice d'une v.a. à valeurs entières : exemples et applications.
5. Couples de v.a. discrètes.
   — Définition.
   — Loi conjointe. Lois marginales, lois conditionnelles.
   — Covariance de deux v.a. Variance d'une somme de v.a.
   — Covariance de deux v.a. indépendantes. Exemple de v.a. dépendantes et non corrélées.
   — Application à la régression linéaire.
6. Variables aléatoires continues.
   — Espace probabilisé : Univers Ω, tribu des évènements $\mathscr{F}$ sur Ω, mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
   — Définition d'une v.a. continue par mesurabilité (on n'insiste pas trop sur la notion de Borélien).
   — Événement $[X \in A]$, lorsque A est une partie borélienne de $\mathbb{R}$.
   — Définition d'une loi, d'une loi à densité. Quelques lois à densité usuelles : uniforme, exponentielle, Gamma (avec paramètre entier), de Cauchy, normale.
   — À titre culturel : définition de l'espérance par "intégrale de Lebesgue".
   — Espérance d'une loi à densité. Linéarité de l'espérance et Théorème de transfert admis.
   — Variance et fonction de répartition d'une loi à densité. Quelques calculs pour les lois usuelles.
7. Convergence de suites de v.a.

— Notions de convergence presque-sûre et en probabilité, lien entre ces deux modes de convergence (preuve admise).
— Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
— Loi faible des grands nombres.
— Définition de la convergence en loi. Caractérisation avec les fonctions de répartition.
— Énoncé du théorème central limite. Quelques applications.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).
Un accent particulier est mis sur le fait de bien connaître les hypothèses de chaque théorème, en particulier pour la loi des grands nombres et le théorème central limite.
Les démonstrations sont toutes à comprendre. Il faut savoir les restituer sauf mention explicite du contraire, ce sera par exemple le cas pour le théorème de transfert.

Compétences

Le but du cours est de définir un cadre rigoureux dans lequel on peut construire une théorie des probabilités. À la fin de ce cours, il s'agit avant toute chose de se sentir suffisamment à l'aise dans ce nouveau cadre pour répondre à des problèmes concrets faisant intervenir de l'aléatoire. Cette compétence au sens large peut se décliner en trois sous-compétences :

Modélisation probabiliste Le traitement mathématique d'un problème avec une part d'aléatoire doit en premier lieu être décrit dans le langage de la théorie des probabilités. Cette première étape de l'étude d'un problème tient plus de la modélisation que des mathématiques et ne pourra pas constituer une part importante de l'évaluation. Néanmoins, il est important de comprendre plusieurs choses à ce sujet : savoir où s'arrête la modélisation et où commence le traitement mathématique du problème, savoir interpréter certains choix faits dans la modélisation (par exemple l'indépendance de variables aléatoires ou le choix d'une certaine loi de probabilité), et savoir interpréter le résultat d'un calcul en revenant au problème de départ. Il convient également de faire la distinction, particulièrement subtile en probabilités, entre le raisonnement intuitif, qui permet souvent d'avoir une idée de la solution à un problème, et le raisonnement rigoureux, qui permet d'arriver à la solution avec certitude.

Raisonnement probabiliste La théorie des probabilités, bien que très proche des théories des séries et des intégrales, possède ses particularités, notamment par ses notations qui sont souvent déroutantes au début, et par certains raisonnements qu'on ne retrouve pas dans les autres matières. Certains points délicats doivent être acquis pour l'examen : distinction entre variable aléatoire, mesure de probabilités, loi de probabilité, utilisation de l'indépendance ou de la disjonction d'événements, distinction entre indépendance et non-corrélation. Ces points précis demandent un travail de relecture du cours qui va au-delà de la compréhension intuitive des probabilités.

Aspects calculatoires Les exercices de probabilités sont assez souvent calculatoires et font appels à des outils introduits dans les UE d'analyse. En probabilités discrètes, il faut savoir montrer qu'une suite de réels décrit une loi de probabilité, puis savoir calculer des espérances par rapport à cette loi avec le théorème de transfert. Ces calculs nécessitent une certaine aisance dans la manipulation des séries à termes positifs. En probabilités continues, il faut savoir mener des calculs similaires : montrer qu'une certaine fonction est une densité de probabilité, calculer des espérances à partir de cette densité, calculer une fonction de répartition. Ces calculs sont basés sur la théorie de l'intégration, dans laquelle il faut se sentir à l'aise.

3.3 Intégration et séries numériques

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

1. Séries numériques : 3 semaines (6h CM et 9h TD)
   Attention, ce chapitre est à traiter impérativement en premier pour que l'UE de probabilités en parallèle puisse rapidement utiliser les notions.
   — Définition d'une série de terme général u_n dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (notation $\sum u_n$), de la somme partielle. Définition de la somme (notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) et du reste pour les séries convergentes. Exemple de la série géométrique, séries télescopiques. Autres exemples de séries convergentes et divergentes.
   Attention à bien mettre en évidence la différence entre somme finie, série et somme d'une série malgré l'utilisation du même symbole $\sum$.
   — Espace vectoriel des séries convergentes : stabilité par combinaison linéaire.
   — "Si la série est convergente, le reste converge vers 0, le terme général converge vers 0." Contre-exemple à la réciproque avec la série harmonique.
   — Comparaison des séries à terme général positif : cas $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \leq v_n$. Critères de convergence : D'Alembert et Cauchy.
   — Comparaison série - intégrale pour les fonctions monotones. Exemple pour déterminer la convergence de série du type $\sum f(n)$ avec f décroissante dont on connaît une primitive. Exemple pour déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   Attention, l'intégration n'a pas encore été traitée en détails mais le calcul d'intégrales à été vu au S2 Descartes. Il est inutile d'énoncer les liens série-intégrale sous forme de nombreux théorèmes mais il faut mettre en avant la méthode.
   — Séries de références : Séries de Riemann.
   Il est possible de traiter les séries de Bertrand en exercice mais ce n'est pas un attendu du cours.
   — Séries à terme quelconque : définition de la convergence absolue. Théorème sur la convergence absolue qui entraîne la convergence simple (on pourra admettre ce résultat - les suites de Cauchy n'ont pas été vues). Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente. Exemple de série exponentielle. Définition de la semi-convergence. Théorème sur les séries alternées. Exemple de la série harmonique alternée.
   Les résultats sur les réarrangements de termes dans une série absolument convergente (utiles en probabilités) ou pour une série semi-convergente pourront être abordés en exercice ou en remarque en évitant les notations trop lourdes. Cependant, la maîtrise complète et autonome de ces résultats par les étudiants n'est pas attendue dans ce cours.
   — Sommation des relations de comparaison : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$ et $u_n = O(v_n)$. Théorème pour les séries divergentes et de convergentes.
   — Culture générale : développement décimal illimité.
2. Intégrale de Riemann : 6 semaines (12h CM, 18h TD)
   — Construction de l'intégrale de Riemann sur un segment $[a,b]$: définition d'une subdivision, d'une fonction en escaliers. Espace vectoriel des fonctions en escaliers. Définition de l'intégrale d'une fonction en escaliers. Propriété de l'intégrale pour les fonctions en escaliers : combinaison linéaire, inégalité triangulaire, croissance et positivité, Chasles, égalité de l'intégrale si les fonctions différent uniquement en un nombre fini de points.
   Dans cette partie, afin de préparer l'introduction de l'intégrale de Lebesgue en L3 Math approfondies, les subdivisions doivent être définies de façon générale et non pas comme une subdivision régulière du type $a + k\frac{(b-a)}{n}$.
   — Définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann (i.e. encadrée par des fonctions en escaliers donc les intégrales diffèrent de moins de ε). Définition de l'intégrale d'une fonction intégrable au sens de Riemann. Les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann. Définition d'une fonction continue par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann. Les fonctions dérivées sont intégrables au sens de Riemann (démonstration via le théorème des accroissements finis vu au S3).

— Propriétés de l'intégrale : Linéarité, positivité, relation de Chasles. "Une fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle est nécessairement nulle".
— Définition de la valeur moyenne. Théorème de la moyenne et inégalité de la moyenne. Interprétation géométrique.
— Inégalité triangulaire pour l'intégrale de Riemann. Le produit de fonctions intégrables au sens de Riemann est intégrable au sens de Riemann. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
— Définition d'une primitive. "Deux primitives diffèrent d'une constante". "La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a". "Les fonctions continues par morceaux admettent des primitives". Formule de calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.
Cette partie a déjà été traitée longuement en S2 Descartes sous l'angle du calcul
— Calcul d'intégrale : formule d'intégration par parties et formule de changement de variable.
— Somme de Riemann : définition pour un système de points intermédiaires d'une subdivision quelconque. Théorème sur la convergence des sommes de Riemann. Application au calcul de limite de suites définie par des sommes.

3. Intégrales généralisées : 3 semaines (6h CM et 9h TD)
— Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert borné ou non borné. Premiers exemple. Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert.
Bien mettre en avant l'importance d'étudier séparément la convergence en chaque borne de l'intervalle et que cela ne peut se faire avec une seule limite.
— Propriétés des intégrales généralisées : Linéarité, positivité, relation de Chasles. "Une fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle est nécessairement nulle". Dérivée d'une intégrale généralisée fonction de sa borne supérieure (ou inférieure).
— Énoncé propre du théorème de comparaison série-intégrale. Intégrales de référence : intégrales de Riemann, intégrale d'une exponentielle.
On pourra à nouveau étudier les intégrales de Bertrand en TD mais elles ne font pas partie du cours.
— Comparaison d'intégrales pour les fonctions positives : $f = o(g)$, $f \sim g$, $f = O(g)$ et $f \leq g$.
— Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert ($\int |f|$ converge). Inégalité triangulaire pour les fonctions intégrables. Définition d'une intégrale semi-convergente.
— Théorème de Cauchy-Schwarz. Théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées. Exemple des fonctions du type $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$.
Pour les intégrations par parties, on demandera de toujours se ramener à un segment pour faire l'IPP avant de prendre la limite.
— Intégration des relations de comparaison. Cas de divergence et de convergence.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Dans l'UE Suites et fonctions du S3, les énoncés ont été donnés dans $\mathbb{R}$ avec simplement quelques remarques sur les suites et fonctions à valeurs complexes. Dans ce cours, on pourra énoncer les résultats pour des séries réelles ou complexes mais on appliquera généralement ces résultats à des séries dans $\mathbb{R}$. Néanmoins on pourra aussi considérer un ou deux exemples ou exercices sur des séries complexes pour habituer les étudiants à ce contexte.
Au niveau des exemples, la convergence des séries géométrique, des séries télescopiques et de la série harmonique a déjà été vu au S2 Descartes dans l'UE "Suites, systèmes linéaires et intégration", mais il est important de le répéter.
Attention, la notion de suite de Cauchy est hors-programme en L1 comme en L2. On évitera donc les démonstrations utilisant cette notion ou sinon il faudra redémontrer la convergence des suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes n'est pas au programme. Ce théorème pourra être introduit dans l'UE qui traite des séries entières en L3.
Les méthodes des rectangles ou des trapèzes pour le calcul approché d'intégrales ne sont pas au programme de cette UE mais des exercices de TD portant sur le sujet sont tout à fait adaptés pour illustrer la partie théorique de ce cours sur l'intégration.
Pour les théorèmes dont les démonstrations sont répétitives comme par exemple, les théorèmes de comparaison pour la

convergence des séries ou des intégrales, on pourra faire une démonstration dans le cours et renvoyer les autres démonstration au TD.
L'étude des intégrales à paramètres dans sa généralité n'est pas au programme de cette UE et repoussé en L3 (quand les étudiants auront étudié les fonctions de plusieurs variables). Cependant l'étude du comportement des intégrales à paramètres dans différentes situation peut fournir des exercices théoriques pertinents pour cette UE.

Compétences
A la fin de cette UE, les étudiants doivent être capables d'estimer rapidement la convergence ou non d'une série donnée par une formule simple.
Il faut revenir de manière importante sur les aspects calculatoires des intégrales (via des changements de variables et des IPP). Ceux-ci ont été vus au S2 et doivent être consolidés ici. Il faut revenir sur des calcul d'intégrales de fractions rationnelles.

3.4 Modélisation

(30h de PA par groupes de 20 étudiants)

Programme
Dans cette UE on part d'un ou plusieurs problèmes issus du monde réel et on développe une méthodologie mathématique pour le/les étudier. On donne au départ une proposition de modèle mathématique aux étudiant.es.
L'enjeu est d'étudier les propriétés théoriques et numériques du modèle, d'en analyser les résultats et d'évaluer son adéquation avec le problème initial.
Par exemple les problèmes peuvent appartenir aux domaines d'application suivants : dynamique des populations, compression, restauration de signaux (images, musique, données médicales...), classification (algorithme de PageRank, perceptron, analyse factorielle discriminante...), systèmes chimiques, cryptographie, écologie, théorie des jeux, réseaux (information, codage,...), économétrie (prévision,...), sondages, métrologie.

Objectifs et attendus L'objectif de l'UE est l'initiation des étudiant.es aux mathématiques appliquées et à leur méthodologie.
Connaissances du cours

- Les connaissances mathématiques sur lesquelles s'appuient l'étude des modèles proposés sont celles que les étudiant.es ont appris dans les cours antérieurs et elles seront révisées pendant le cours. L'UE permet ainsi de revoir un certain nombre de notions fondamentales et de les mobiliser pour résoudre les problèmes posés.
- La partie programmation s'appuie sur le langage Python. Les étudiant.es en ont pour la plupart des notions mais une petite initiation est proposée à ceux et celles qui n'en ont pas les connaissances de base.

Compétences

- L'UE est enseignée en pédagogie d'apprentissage par projet. Les étudiant.es travaillent en groupe de 4, et sont amené.es à se répartir le travail et à collaborer.
- La programmation d'algorithmes, le tracé de figures claires à l'aide de Python sont des compétences mobilisées pendant l'UE.
- Les modèles étudiés seront toujours fournis (pas de modélisation au sens strict donc), mais les étudiant.es seront invité.es à comprendre partiellement les choix qui ont permis l'établissement de ces modèles. Ensuite, le lien sera fait entre les les propriétés du modèle et les phénomènes qu'il modélise. Les étudiant·es devront finalement discuter les prévisions faites par les modèles étudiés et leur pertinence pour les phénomènes en cause.
- Des rendus de synthèse sont demandés sous forme écrite et/ou orale. La rédaction et la présentation des résultats ainsi que des étapes nécessaires à la construction des solutions proposées permettent de travailler l'écriture de preuves et résultats mathématiques ainsi que leur présentation orale.

3.5 Fondements des mathématiques

(12h de cours en amphi, 18h de TD)

Les étudiantes et étudiants utilisent les nombres réels depuis le lycée sans qu'on ne leur ait jamais parlé du fait qu'ils sont à la fois une invention récente dans l'histoire des mathématiques, ni que leur existence a posé et continue à poser de sérieux problèmes. L'un des buts de cette UE est de leur montrer comment on peut solidement en fonder la théorie. Le cours peut se limiter à donner des définitions (ordre, corps etc.) ainsi que quelques démonstrations ou constructions afin de montrer l'unité du tout et ses articulations internes. Le reste peut se faire sous la forme d'exercices et de problèmes dont on extrait, avec les étudiant.e.s, de quoi remplir un fascicule de résultats. La deuxième partie du cours peut déboucher sur de multiples développements à faire en travaux dirigés, autour par exemple de l'approximation des nombres réels (écritures en base ou fractions continues etc.), ou de certaines constructions intrigantes (ensembles de Cantor, fonction de Weierstraß etc.) ou des démonstrations classiques de transcendance de e et de π mêlant arithmétique et analyse.

Objectifs de l'UE.

- L'existence des nombres réels semble pour nos étudiants et étudiantes un acquis qu'il n'est plus utile de questionner. Le premier objectif est de leur faire prendre conscience que ces objets sont plus problématiques qu'il n 'y parait. La sensibilité aux questions qui nous semblent résolues est à la base de la démarche scientifique.
- La méthode axiomatique est au fondement de la pratique des mathématiques ; cependant jamais ou presque nos étudiantes et étudiants n'y sont confrontés. Autour de l'objet familier qu'est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, il sera vu comment le choix d'un petit nombre d'énoncés d'apparence simple peut aboutir rapidement à la démonstration de théorèmes avancés de l'analyse mathématique mais a aussi pour conséquences quelques énoncés admis très tôt dans la scolarité. Cela sensibilise les étudiants et étudiantes à l'unité de la discipline.
- L'utilisation des méthodes et concepts abstraits de la théorie des ensembles est au cœur de la pratique contemporaine des mathématiques. La construction des nombres réels est l'occasion de les mettre en pratique en en montrant à la fois la puissance tout en démystifiant certaines notions comme celle de quotient dont on montrera qu'elle n'est qu'un procédé tautologique permettant de démontrer l'existence de certains objets ayant les propriétés que l'on désire.
- La rédaction est l'étape finale de l'activité principale du mathématicien ou de la mathématicienne et une attention particulière sera apportée aux progrès des étudiantes et des étudiants dans ce domaine, par exemple lors de la rédaction commune d'un fascicule de résultats.

Programme

Première partie : l'approche axiomatique.

On considère ici que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné, archimédien et complet, sans se préoccuper de savoir comment ou à partir de quoi on peut le construire. On l'introduit donc comme modèle d'une axiomatique.

1. Axiomes de la structure de corps. Quelques conséquences (unicité des éléments neutres ou des opposés, identités remarquables, binôme etc.).
2. Les axiomes de corps ordonné. Quelques conséquences (positivité des carrés, opposés des positifs, valeur absolue etc.).
3. La propriété d'Archimède, formes équivalentes de son énoncé (par exemple $\lim_{+\infty} n^{-1} = 0$).
4. Choix d'un axiome pour la complétude : toute suite croissante et majorée converge. On admet qu'il existe un corps totalement ordonné, archimédien et complet, on le note $\mathbb{R}$.
5. Le corps des nombres rationnels est naturellement sous-corps de $\mathbb{R}$. Existence de nombres irrationnels (par exemple $\sqrt{2}$ ou e).
6. À partir des axiomes (corps, ordre total, propriété d'Archimède, convergence des suites croissantes et majorées), redémontrer quelques résultats de base comme le théorème des segments emboîtés et le théorème de Bolzano–Weierstraß. Théorème des valeurs intermédiaires, application à l'existence de racines carrées (ainsi $\sqrt{2}$ est un nombre réel).

7. Le critère de Cauchy. Toute suite de Cauchy est convergente. On peut donc démontrer qu'une suite converge sans connaître *a priori* la valeur de sa limite.
8. Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$, alors $x = 0$. Borne supérieure d'une partie, caractérisations. Démonstration de la propriété de la borne supérieure.
9. Notion de coupure de $\mathbb{R}$: partition (G,D) telle que pour tout $x \in G$ et tout $y \in D$ on ait $x < y$. La propriété de complétude par coupure de $\mathbb{R}$: pour toute coupure (G,D), il existe un nombre réel x et un seul tel que $G =]-\infty, x[$ ou $G =]-\infty, x]$.
10. Liens logiques entre les divers énoncés de complétude. Borne sup (BS) implique Archimède (A) et convergence des suites croissantes majorées (CSCM). Équivalence entre la complétude par coupure (CC) et (BS). Convergence des suites de Cauchy (CSC) et (A) impliquent (BS) etc. Sensibiliser les étudiant.e.s au fait que l'on dispose d'une certaine latitude dans le choix des axiomes.
11. Énoncé du théorème d'Ostrowski : il y a un seul corps totalement ordonné, archimédien et complet, à unique isomorphisme près. Nous sommes donc en droit de parler *du* corps des nombres réels.

Deuxième partie : constructions de $\mathbb{R}$.

On propose ici une ou deux constructions ensemblistes de $\mathbb{R}$, en partant des entiers naturels.

1. L'ensemble $\mathbb{N}$, la propriété fondamentale de l'ordre sur les entiers (notion de bon ordre), équivalence avec la validité du principe de démonstration par récurrence.
2. Construction par symétrisation de $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Q}$.
3. Première construction : les coupures de Dedekind.
4. Deuxième construction : la complétion par les suites de Cauchy.
5. L'écriture décimale illimitée et la nécessité de sa non-unicité. Caractérisation des nombres rationnels. Existence de nombres transcendants par la méthode de Liouville.
6. Non dénombrabilité des intervalles : preuve via l'écriture binaire ou décimale et l'argument diagonal, preuve originale de Cantor via les segments emboîtés, preuve par l'inclusion du triadique de Cantor et l'indénombrabilité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

3.6 Métiers du décisionnel

(2h de cours, 12h de TD, 2h de PA)

Programme

L'objectif de cet enseignement est de faire découvrir aux étudiants souhaitant se professionnaliser à BAC+3 la licence professionnelle "Métiers du Décisionnel et de la Statistique" (MDS) et les métiers du décisionnel, auxquels elle conduit. L'enseignement sera organisé en 5 journées de 6 h, dont 2h de TP par journée.

- *Présentation de la licence professionnelle MDS* : rencontre avec les anciens étudiants et enseignants de la formation ; présentation de l'alternance par le CFA Epure et de la VAE.
- *Les bases de données (BD)* : qu'est-ce qu'une BD ? Un entrepôt de données ? Les Big Data ? Présentation des métiers des BD et du Big data.
- *Les outils de gestion et traitement de données* : présentation de RStudio-Jamovi, SAS, excel-VBA.
- *La statistique classique et décisionnelle* : présentation des métiers de la statistique par l'INSEE ; présentation de la statistique médicale par l'APHM ; présentation des métiers de la statistique décisionnelle.
- *TP guidé en Python pour l'analyse et la visualisation de données* : présentation de la Data Viz et du notebook jupyter.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

En tant qu'option d'orientation, cet enseignement n'a pas pour objectif de fournir de connaissances théoriques ou techniques, mais de permettre aux étudiants de prendre connaissance des outils et du milieu des BD, de la statistique et du décisionnel.

Compétences

Ce cours permettra aux étudiants de

- comprendre les enjeux du décisionnel
- découvrir les métiers du décisionnel
- découvrir les outils informatiques du décisionnel
- comprendre un document écrit à caractère informatif en anglais.

4 Licence de Mathématiques - Parcours Maths S5

4.1 Espaces euclidiens et géométrie

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

1. Rappels sur le plan et l'espace euclidien classique (2 semaines)
   (a) Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Définition du produit scalaire, de la norme. Liens entre produit scalaire et norme (on admet connue la notion d'angle). Inégalité de Cauchy-Schwarz. Transformations vectorielles du plan (projections orthogonales, réflexions orthogonales et rotations). Notion d'orientation.
   Lien avec l'utilisation des nombres complexes.
   (b) L'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien. Produit scalaire, norme. Orientation de l'espace. Endomorphismes remarquables : Projections orthogonales, rotations, symétries orthogonales.
2. Espaces euclidiens "abstraits" (en dimension finie) (7 semaines)
   (a) Définition générale de produit scalaire. Norme. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, identités de polarisation. Orthogonalité pour les vecteurs, les sous-espaces. Orthogonal d'un espace et décompositions en somme directe orthogonale. (2 semaines)
   (b) Bases orthonormées. Expression du produit scalaire, coordonnées dans une base orthonormale (BON). Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, existence de BON. Exemples de BON (polynômes orthogonaux, etc.). Projections et symétries orthogonales. (2 semaines)
   (c) Isométries. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie. Isométries directes. Représentation matricielle dans une BON. Classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3. (3 semaines)
3. Algèbre bilinéaire (3 semaines)
   Adjoint d'un endomorphisme (mais on ne parle pas de dualité), endomorphisme auto-adjoint, théorème spectral. Forme quadratiques, formes bilinéaires symétriques, forme polaire, matrice d'une forme quadratique, changement de base.

Objectifs et attendus
Connaissances du cours
Les définitions et les énoncés (théorèmes, propositions, etc ...) doivent être connus parfaitement. Il faut savoir utiliser les définitions pour montrer qu'un objet à la bonne propriété (Montrer qu'une application est un produit scalaire, qu'une famille est une base orthonormée, etc ...).

Compétences
Aspects calculatoires
Il faut savoir déterminer des produits scalaires et des distances dans le plan et l'espace. Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace. Reconnaitre une base orthonormée. Savoir utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt dans des cas pratiques pour construire une base orthonormée.
Il faut savoir reconnaître les isométries et opérateurs autoadjoints à partir de leur matrice, et dans les cas pertinents (rotations, symétries, projecteurs) calculer les caractéristiques géométriques (axe/angle, miroir, image respectivement).

Raisonnement
Cette UE donne l'occasion de mettre en pratique dans un cadre géométrique les raisonnements mis en place dans les UE "Algèbre linéaire 1" et "Algèbre linéaire 2" de la L2. Il faut que l'étudiant fasse le lien entre le comportement géométrique des transformations et la théorie de la réduction vue au S4 ; en particulier il faut savoir se placer dans une base adaptée pour résoudre des questions d'ordre général sur des objets ou transformations géométriques.

4.2 Groupes

(12h de cours en amphi, 18h de TD)

Programme

- Notion de groupe : définition formelle et illustration par les groupes $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, S^1, GL_2. Unicité de l'inverse et de l'élément neutre. Produit cartésien, exemple $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$.
- Groupe cyclique, groupe monogène. Groupe additif des entiers modulo n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, groupe des racines n-ièmes de l'unité.
- Groupe des bijections d'un ensemble. Groupe symétrique S_n. Représentation des permutations sous la forme d'un tableau à deux lignes, composition, inverse. Table de la loi du groupe symétrique pour $n = 2, 3$.
- Définitions de transposition, du support d'une permutation, d'un cycle. S_n est engendré par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Les permutations à supports disjoints commutent.
- Sous-groupe, morphisme et isomorphisme : définition, illustration sur les exemples simples.
- Ordre d'un élément, calcul dans les groupes symétriques et les groupes cycliques. Théorème de Lagrange (admis).
- Définition de la signature (on peut admettre que la signature correspond au nombre de transpositions nécessaires pour écrire la permutation). Sous-groupe alterné (on ne parle pas dans ce cours de sous-groupe distingué).
- Isomorphisme de groupes entre $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ lorsque p et q sont premiers entre eux (théorème des restes chinois).

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Prérequis, qui devront être évalués : bijection, bijection réciproque, composition d'applications, produit de matrices, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, calculs modulo n.

Les définitions, théorèmes doivent tous être connus parfaitement.

La définition d'un groupe doit être connue exactement avec les quantificateurs ; l'unicité de l'élément neutre et des inverses doit pouvoir être démontrée à partir des axiomes.

Le passage d'une notation à une autre des permutations (diagramme, matricielle, cycles), la composition et l'inversion avec ces diverses représentations doivent devenir des automatismes de calcul pendant ce cours.

Calculer la décomposition en cycles à support disjoint d'une permutation et son ordre doivent être acquis à la fin de ce cours.

Connaître les éléments du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et leurs ordres, identifier ce groupe avec le groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité.

Le programme est un peu long et les deux derniers points du programme ne pourront pas être traités en profondeur, et il ne faudra pas hésiter à admettre certains points.

Compétences

Connaître des exemples de groupes, déterminer si un ensemble muni d'une loi est un groupe, identifier l'élément neutre, les inverses, reconnaître si un groupe est commutatif.

Exemples à connaître : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, S_n, $\mathbb{Z}^d$, $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 0)$ sont des groupes, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \times)$ ne sont pas des groupes.

Savoir définir S_n, connaître son cardinal, les injections de S_n dans S_m pour $n \leq m$. Pouvoir lister les différents types d'éléments de S_n pour $n \leq 5$ (c'est-à-dire les classes de conjugaison) sans pour autant connaître la conjugaison. Connaître l'ordre de ces éléments.

Savoir calculer l'ordre d'une permutation, l'ordre d'un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Connaître des éléments d'ordre infini.

Connaître les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

4.3 Épreuve intégrative S5

(3h cours en amphi, 18h de TD, 1h de pédagogie active (PA) par groupes de 3 étudiants)

Programme Le programme de cette UE est de proposer des épreuves écrites longues, présentées sous forme de problèmes (par exemple des épreuves de type CAPES), ayant lieu de manière périodique et faisant référence aux cours de L1 et de L2. Un des objectifs de cette Ue est de préparer les étudiant.e.s à des épreuves écrites de concours. Il y aura 3 épreuves de 3h chacune réparties durant le semestre. Il y aura 3h de CM pour présenter l'UE, donner des conseils pour effectuer ce type d'épreuve, donner des conseils de rédaction mathématiques, et faire les rappels de mathématiques nécessaires aux trois épreuves. L'enseignant.e rédigera des corrigés des sujets donnés qui seront distribuées aux étudiant.e.s à la fin des épreuves écrites.

Pour chacune des trois épreuves écrites, l'enseignant.e rédigera un corrigé du sujet qui sera distribué aux étudiant.e.s à l'issue de l'épreuve, corrigera ensuite les copies, puis proposera des séances de remédiation sous plusieurs formes :

- Une séance collective de TD portant sur les erreurs les plus fréquentes des étudiant.e.s, développant au tableau la correction de certaines questions et donnant aussi éventuellement quelques compléments qui pourraient s'avérer nécessaires.
- Des séances de remédiation en petits groupes d'étudiants, voire des retours individuels, qui permettront d'analyser en détail chaque copie et d'indiquer précisément à l'étudiant.e les points à améliorer dans son travail.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Le programme des épreuves doit concerner les points vus en L1 et L2, et plus particulièrement les suivants :

1. L'algèbre linéaire en dimension finie
2. L'analyse d'une variable réelle
3. l'arithmétique élémentaire
4. l'utilisation des quantificateurs
5. les opérations booléennes sur les ensembles et sur les applications
6. les différents types de raisonnement

Le niveau attendu est celui d'une épreuve de concours du CAPES de mathématiques.

Compétences L'objectif principal de cette UE est le travail la rédaction mathématique, et de faire manipuler dans un même problème des connaissances apprises les années précédentes dans des UE différentes. Les retours individualisés pourront permettre aux étudiant.e.s d'améliorer significativement leur rédaction. Une attention particulière sera donc donnée à la rédaction. Mais il y aura aussi une évaluation de la capacité qu'ont les étudiant.e.s à manipuler les points cités précédemment.

4.4 Fonctions de plusieurs variables et équations différentielles

(36h de cours en amphi, 48h de TD, 6h de TP)

Programme

1. **Les espaces vectoriels normés de dimension finie** : 4 semaines (12h CM, 16h TD)
   — Définition d'une norme sur un espace vectoriel. Exemple de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et du module sur $\mathbb{C}$. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{R}^n$. Exemples des normes de matrices ou des normes d'applications linéaires. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
   Attention, la notion de norme n'a pas été introduite avant mais en parallèle, les étudiants étudient les espaces euclidiens dans l'UE "Espaces euclidiens et géométrie".
   — Convergence dans un espace vectoriel normé de dimension finie : Définition de la convergence d'une suite d'un evn à l'aide des normes. Théorème sur l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$ (admis). Équivalence avec la convergence coordonnée par coordonnée dans un evn de dimension finie. Nombreux exemples explicites.
   — Vocabulaire de topologie (dans $\mathbb{R}^n$) : ouvert, fermé, voisinage, adhérence, intérieur. Nombreux exemples simples. Caractérisation séquentielle des ensembles fermés et de l'adhérence. Intersection et union finie d'ouverts ou de fermés.
   Les notions d'adhérence et de voisinage ont été introduite dans l'UE "Suite et fonctions d'une variable réelle" du S3 pour les ensembles de $\mathbb{R}$ mais n'ont pas été travaillées.
   — Fonction de $\mathbb{R}$ dans un evn de dimension finie. Définition de la continuité et de la dérivabilité avec les normes. Équivalence avec la continuité et la dérivabilité des applications coordonnées. Exemple d'étude simple de courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Vecteur tangent à la courbe.
2. **Fonctions de plusieurs variables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$:** 5 semaines (15h CM, 20h TD)
   — Continuité. Définition. Continuité d'une combinaison linéaire et d'une composée. Continuité du produit ou d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Continuité des fonctions polynomiales en plusieurs variables.
   — Si f est continue, les ensembles du type $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$ sont ouverts (et fermés si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large).
   — Définition des applications partielles. Continuité des applications partielles. Exemples et contre-exemples.
   — Dérivée en un point selon un vecteur, dérivées partielles d'ordre 1. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   — Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ admet en tout point un développement limité d'ordre 1. Définition de la différentielle de f en un point. Exemples simples ou un peu plus théoriques comme $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle AX, X\rangle$ avec A symétrique.
   Attention, le produit scalaire est étudié en parallèle dans l'UE "Espaces euclidiens et géométrie".
   — Dérivée de $t \longmapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$. Application au calcul des dérivées partielles de :
   $$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)).$$
   Exemple des coordonnées polaires.
   — Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Interprétation comme la direction de plus grande croissance locale. Cas géométriques : courbe du plan définie par $f(x,y) = 0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$ (on admettra que cette courbe admet un paramétrage local $\mathscr{C}^1$ au voisinage d'un point régulier) . En un point régulier, la tangente est orthogonale au gradient. Surface du plan définie par $f(x,y,z) = 0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. En un point régulier, le plan tangent est défini comme l'orthogonal au gradient.
   — Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ en un point. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
   — Extrema locaux et globaux d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ admet un extremum local en a, alors a est un point critique.
   Étude des extrema locaux d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ (dans les cas $n = 2$ et 3 uniquement).

3. **Équations différentielles en dimension 1 :** 3 semaines (9h CM, 12h TD, 6h TP)
   — Définition d'équation différentielle du premier ordre ; condition de Cauchy (ou condition initiale) ; problème de Cauchy ; solution maximale ; équations à variables séparables ; exemples.
   Parmi les exemples pour la suite du cours, les équations du type $y' = y^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ (pour la non-unicité) ou $\alpha > 1$ (pour l'explosion en temps fini) devraient être étudiées au moins pour des choix pertinents du paramètre α.
   — Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus : $y' + ay = b$. Résolution de l'équation sans second membre. Méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation générale.
   Ces notions ont déjà été vues dans l'UE "Suites, intégration et systèmes linéaires" du S2 Descartes mais doivent être reprises. La résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires dans $\mathbb{R}^2$ ou la résolution d'équations linéaires d'ordre 2 sera étudiée en TD mais les étudiants n'ont pas à savoir appliquer les méthodes de façon autonome.
   — Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $I \times \Omega$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathscr{C}^1$ [énoncé seulement, sans démonstration, avec commentaires]. Utilisation pour montrer la positivité de solutions d'une équation différentielle modélisant un problème issu de la biologie, de la mécanique ou de l'économie.
   — Méthode numérique : schéma d'Euler explicite. Notion de convergence et démonstration.
   — TP en python : résolution numérique d'une équation différentielle à l'aide du schéma d'Euler. Résolution d'une équation différentielle issue d'un contexte appliqué (dynamique des populations, mécanique ou économie) et interprétation des solutions dans ce contexte.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours La première partie sur les evn et la topologie n'a pas à être traitée de manière exhaustive. Le but est uniquement que les étudiants connaissent les outils nécessaires à l'étude des fonctions de plusieurs variables. On pourra donc montrer des contre-exemples qui illustrent certaines propriétés mais on se contentera d'exercices dans des cas simples que les étudiants rencontreront dans la suite du cours ($\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[^n$).
De même pour les fonctions, on privilégiera des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. De manière générale, on privilégiera les exemples aux démonstrations, et on insistera sur la signification des énoncés plutôt que sur leurs démonstrations qu'on admettra si nécessaire. Il faut que les étudiants s'approprient ces résultats, et le temps consacré au cours permet de développer des exemples significatifs.
Cette UE sera l'occasion de revoir l'usage des quantificateurs ; en particulier quand on travaillera les notions de topologie. C'est aussi l'occasion de revenir sur des calculs de dérivées et d'intégrales.
Compétences A la fin de l'UE,

1. Les étudiants doivent savoir calculer une dérivée de composées de fonctions en plusieurs variables dans des cas concrets.
2. Les étudiants doivent être capables de mener complètement l'étude des extrema locaux et globaux d'une fonction de deux variables.
3. Les étudiants savent résoudre de manière exacte une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de façon autonome. Ils savent résoudre de manière approchée à l'aide de Python une équation différentielle simple.

4.5 Algorithmique et programmation 2

(12h de cours en amphi, 18h de TP)

Cette UE se base sur l'UE de Programmation en Python qui aura été suivie en portail Descartes, puis sur l'UE d'Algorithmique et programmation 1 qui aura été suivie en L2 Mathématiques.
Programme

- Remédiation de méthodologie de la programmation orientée objet en Python (surtout pour les nouveaux entrants)
- Aspects avancés de programmation en Python :
  - Définition par compréhension
  - Générateurs
  - Objets itérables
- Introduction à des méthodes de gestion de projet informatique
  - Gestion de version Git
- Idées de projets possibles pour illustrer les concepts avancés vus dans ce cours
  - Calcul d'enveloppe convexe et rectangle englobant
  - Courbes de Bézier
  - Utilisation de l'aléatoire au détour de la programmation d'un jeu

Objectifs et attendus
Connaissances du cours
Si ce cours contient assez peu de connaissances nouvelles en termes de programmation et d'algorithmique, son organisation permettra facilement de différencier le niveau suivant les étudiants. En particulier, il est probable que les nouveaux entrants aient vu beaucoup moins de contenus en programmation (en particulier orientée objets) en Python et nécessitent donc des séances spécifiques. Pour ceux qui ont déjà suivi les UE d'informatique du portail Descartes et de L2 Maths, ils pourront directement réfléchir en petits groupes sur les projets de programmation et d'algorithmique suggérés, dont la liste est non exhaustive.

Compétences
À la fin du cours, on s'attend à ce que les étudiants validant le cours soient en mesure de :
- programmer une application conséquente en Python avec structuration en classes et utilisation de bibliothèques externes
- faire preuve d'esprit critique sur les erreurs d'approximation flottante inhérente au calcul numérique et géométrique
- programmer en groupes, en utilisant certaines techniques de gestion de projet informatique

5 Licence de Mathématiques - Parcours Maths S6

5.1 Groupes et géométrie

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

Ce cours vient à la suite des deux cours Espaces euclidiens et géométrie et Groupes du semestre 5. En revenant à des notions classiques et aux dessins de la géométrie, ce cours permet d'illustrer la notion de groupe vu au semestre 5. Il introduit la notion d'action de groupes.

- Rappels sur le groupe des isométries vectorielles du plan : rotations, symétries, produit de symétries, effet géométrique de la conjugaison sur les symétries et rotations. Isomorphisme du sous-groupe des isométries directes avec $\mathbf{S}^1$.
  Sous-groupe laissant invariant une droite, un triangle. Sous-groupes cycliques et groupes diédraux.
- Rappels sur le groupe des isométries vectorielles de l'espace : rotations et demi-tours, réflexions. Éléments géométriques (on pourra ou pas parler de l'orientation de l'angle d'une rotation), effet de la conjugaison. Sous-groupes fixant une droite.
  Exemples de sous-groupes finis du groupe des isométries vectorielles de l'espace.
- Actions de groupes : définition, orbites, points fixes, stabilisateurs. Lien avec les morphismes de groupes.
  Exemples géométriques : en particulier, l'action des groupes diédraux sur leurs orbites et permutations associées et celle des sous-groupes finis en dimension 3 sur les figures géométriques associées devraient être étudiées en détail.
  Actions transitives, actions fidèles.
- Transformations affines de la droite, du plan et de l'espace. Sous-groupe des isométries affines. On ne fera pas dans ce cours de théorie des espaces affines. On se limitera à définir dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ les droites et les plans affines, leurs directions. On décrira une transformation affine par son action sur un point et sa partie linéaire.
  Description complexe ($z \mapsto az+b$) des similitudes affines du plan.
- Formule des classes et applications.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Prérequis qui pourront être évalués : espace euclidien, produit scalaire, norme, définition d'un groupe, sous-groupe, isométrie, bijection, matrices orthogonales, groupe orthogonal.

Les définitions et théorèmes du cours doivent être connus exactement.

Le vocabulaire de la géométrie du plan et de l'espace doit être connu et utilisé rigoureusement.

La classification des isométries du plan doit pouvoir être restituée et justifiée. Les éléments géométriques (axe, angle), leurs liens avec la trace, les valeurs propres et les sous-espaces propres doivent être bien compris.

Les groupes d'isométries des figures usuelles de la géométrie (exemples de polygones et polyèdres réguliers) ont été étudiés et peuvent être retrouvés avec l'aide de quelques questions intermédiaires.

Les définitions de points fixes, stabilisateurs, orbites doivent être parfaitement connues.

Compétences Savoir reconnaître une action de groupe.

Savoir illustrer les transformations géométriques sur des figures simples.

Savoir reconnaître la composée d'isométries du plan. Savoir décomposer une isométrie en produit de symétries.

Calculer l'ensemble des points fixes d'une isométrie affine du plan ou de l'espace. Calculer le stabilisateur d'un point.

Savoir déterminer le conjugué d'une isométrie.

5.2 Histoire et épistémologie des maths

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

L'enseignement des sciences ignore le plus souvent complètement le fait que celles-ci ont une histoire. Au mieux mentionne-t-on une anecdote pour pimenter un développement quelque peu abscons. Le but de ce cours est d'amener les étudiants et étudiantes à réaliser que la discipline qu'on leur enseigne depuis qu'ils sont tout petits a une très longue histoire et que celle-ci place les mathématiques au sein de l'histoire générale des idées. Il est l'occasion d'une réflexion sur l'évolution de ses concepts et de ses procédés, sur la nature de ses objets, mais aussi celui du constat que des problèmes soulevés dans l'antiquité perdurent malgré la variété des méthodes utilisées pour les attaquer.
L'histoire et l'épistémologie étant des disciplines universitaires, leur enseignement doit être orienté vers leur pratique. Celle-ci consiste d'abord en la lecture analytique de textes du passé, dont il s'agit de comprendre le contenu mathématique, ce qui passe souvent par une traduction dans un langage moderne, mais aussi d'en saisir les spécificités en repérant dans la transcription moderne les anachronismes, en tenant malgré tout de respecter le plus possible la démarche de l'auteur. Il s'agit ensuite d'initier les étudiants et étudiantes à une réflexion de nature plus philosophique sur les objets, concepts ou méthodes rencontrés. La confrontation avec les sources anciennes est ici précieuse car elle *nous met dans l'obligation* de mener une telle réflexion. Il ne s'agit donc nullement de proposer une sorte de fresque historique qui présenterait une histoire des progrès de mathématiques au cours du temps, dans une vision qui serait par trop téléologique, mais plutôt de mener une réflexion sur la discipline, éclairée par l'histoire.

Objectifs de l'UE.

- Apprendre à lire un texte de mathématique et à en comprendre le contenu, en passant éventuellement par une traduction dans un langage qui nous esst plus familier.
- Savoir respecter l'esprit et le contenu d'un texte ancien tout en en rendant compte le plus clairement et simplement possible.
- Développer un esprit de critique vis-à-vis du texte lu.
- Progresser dans la rédaction en langue française, tant pour les mathématiques que pour des usages plus généraux.
- Entamer une réflexion sur les pratiques, méthodes, notions et concepts de la discipline.

Description du contenu

Au commencement était Euclide. Les *Éléments* d'Euclide sont le texte fondateur de la tradition mathématique occidentale et un passage obligé dans un tel cours. Leur lecture, plus particulièrement des livres I et II, ainsi que de passages des livres V ou VII, est l'occasion de s'interroger sur les notions d'axiomes et de définition, puis d'être confrontés à la pratique de la démonstration de divers types de propositions (théorèmes, problèmes *etc.*). On y découvre un des traits fondamentaux des mathématiques anciennes, celui de la distinction nette entre nombre, c'est-à-dire nombre entier, et grandeur, objet de nature continue. On peut ici ouvrir une discussion sur le problème des relations entre le discret et le continu en faisant appel à des lectures annexes, d'Aristote par exemple (*Organon* ou *Physique*).
On essaie de comprendre les propositions d'Euclide en commençant par les traduire dans le langage qui est le notre, faisant en particulier appel à quelques manipulations algébriques sur des longueurs ou des aires. Cependant, l'absence de mesure numérique des grandeurs continues rend l'usage de l'algèbre complètement anachronique. Il nous faut donc trouver un équilibre entre explication des propositions pour les rendre compréhensible au lecteur contemporain et respect de l'esprit de l'œuvre originale.
Un autre aspect saillant des *Éléments* est leur usage particulier de la notion d'égalité qui, pour les figures, désigne une égalité *en grandeur* (longueur, aire ou volume). Cela est l'occasion d'une réflexion sur la nature de la géométrie, menant progressivement à l'idée de considérer celle-ci comme une science des invariants. La place particulière qu'y jouent les constructions (en géométrie) et les procédé algorithmiques (en arithmétique) nous amène aussi à des réflexions sur la conception même des mathématiques. Cela est illustré par l'organisation générale du traité, qui semble tout orienté vers le problème de la détermination pratique du caractère rationnel ou non de certains rapports de grandeurs que l'on rencontre en géométrie. C'est l'occasion de replacer les *Éléments* dans l'histoire de la philosophie, avec l'échec de la doctrine pythagoricienne à instituer une cosmologie entièrement basée sur les rapports de nombres entiers.

Enfin, en confrontant diverses éditions du texte (Niceron, Peyrard, Vitrac), on montre pourquoi le lecteur ou la lectrice des textes anciens ne doit jamais oublier que les sources sont rares et très diverses, et que les éditions modernes doivent être lues de manière un peu critique.

Descartes : aux sources de la modernité. Après Euclide, l'autre passage obligé est le texte fondateur de la modernité mathématique : *La Géométrie* de René Descartes (1637). C'est là que sont posées les méthodes et les notations de l'analyse algébrique que l'on apprend encore au collège de nos jours. Sa lecture sera l'occasion de dissiper quelques malentendus qui ont la vie dure. Ainsi lit-on souvent que Descartes y invente les coordonnées et utilise des nombres réels. Il n'en n'est rien et l'on montrera que ce qui guide Descartes c'est une analogie entre les *opérations du calcul* et les *constructions de la géométrie.* Jamais il n'oublie que ce qu'il manipule finalement, ce sont des grandeurs et qu'il doit, pour justifier que le calcul formel donne bien une solution à un problème donné, donner la construction géométrique qui lui correspond, quitte à utiliser des instruments plus sophistiqués que les simples règle et compas. Le problème de la mesure numérique des grandeurs continues n'est donc pas abordé par Descartes. La lecture de passages du *Discours de la méthode* ou des *Règles pour la direction de l'esprit* permettent de montrer comment mathématique et philosophie sont intimement liées.

La suite du programme : tisser des liens. Les possibilités offertes par la très longue et très riche histoire des mathématiques sont tellement vastes qu'il faut, une fois visités les deux points nodaux sus-mentionnés, faire des choix drastiques. Le mieux est de faire une petite sélection de *textes* qui permettront d'alimenter la réflexion historique et philosophique, autour, par exemple, d'une ou deux thématiques qui permettent de structurer le tout. On évitera ici les questions par trop philosophiques, comme celle par exemple de la nature des objets mathématiques ou des différences entre démontrabilité et vérité, qui pourront être abordées lors de discussions avec les étudiants et étudiantes. Le choix de thèmes ou de questions générale comme celle des liens entre discret et continu, ou de notions comme celle de fonction, de limite *etc.* seront à même de fournir tout le matériau nécessaire. Voici quelques pistes textuelles en ce sens. Elles pourront être enrichies au fil des ans et varier selon d'éventuelles demande propositions venant des étudiants ou des étudiantes.

- Naissance de l'algèbre : le *Livre d'algèbre et d'al-muqabala,* d'al-Khwarizmi.
- Le problème du continu : le *Traité utile,* de Nicolas d'Autrécourt, la préface et le début du *Que sont et à quoi servent les nombres ?* de Richard Dedekind, la note *Sur une propriété de tous les nombres algébriques réels* de Georg Cantor, des extraits de *La science et l'hypothèse* de Henri Poincaré, la deuxième conférence sur *La perception du changement* de Henri Bergson, ou encore *L'état présent de la connaissance en mathématiques* d'Hermann Weyl *etc.*
- La géométrie, de la perspective aux groupes de transformation : l'*Optique* d'Euclide, le début du *Brouillon Project* de Girard Desargues, le *De l'esprit géométrique,* de Blaise Pascal, le début des *Planiconiques* de Philippe de la Hire, la préface au *Traité des propriétés projectives des figures,* de Jean-Victor Poncelet, le début de la *Géométrie imaginaire,* de Nicolai Lobatschewsky, des extraits du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein *etc.*
- Les notions ensemblistes : lecture de manuscrits de Leibniz, du début du *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis,* de Georg Cantor, ou encore de *Fonction et concept* ou de *Sens et dénotation* de Gottlob Frege, quelques passages de Bourbaki *etc.*
- Nombres et grandeurs : de la définition 6 du livre V des *Éléments* d'Euclide à la construction des nombres réels par divers procédés, accompagné de lectures sur le problème de la composition du continu (le fameux labyrinthe de Leibniz), la note de 1901 d'Henri Lebesgue où il décrit l'intégrale qui porte maintenant son nom.

5.3 Analyse numérique M

(18h de cours en amphi, 24h de TD, 18h de TP)

Programme

1. Approximation d'un nombre (9h CM 12h TD 9h TP)
   — Vitesse de convergence d'une suite réelle, exemples de π et $\ln(2)$; accélération de convergence.
   — Approximation d'un nombre qui est solution d'une équation : point fixe, Newton.
2. Approximation de fonction (9h CM 12h TD 9h TP)
   — polynômes (Lagrange, Bernstein)
   — polynômes trigonométriques.

Objectifs et attendus
Connaissances du cours

1. On cherche d'abord à savoir comment se comporte une suite convergente : converge-t-elle rapidement ou non ? A l'aide de la croissance comparée entre exponentielle, puissance et logarithme, on sera familier avec le comportement des suites types suivantes : $\frac{1}{\ln(n)^a}$, $\frac{1}{n^a}$, k^n, $\frac{1}{n!}$, $\frac{1}{n^n}$, k^{2^n}, $0 < k < 1$; pour d'autre suites, on aura le réflexe de les situer par rapport à ce type de suites. On saura traiter les suites linéaires d'ordre k via la diagonalisation/jordanisation de la matrice sous-jacente. A l'aide du quotient $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^p}$, on introduira les notions de convergence linéaire ($p = 1$) et quadratique ($p = 2$) et on saura faire le lien avec le nombre de chiffres de Digits de précision que l'on gagne à chaque étape. Pour l'accélération de la convergence, on pourra étudier les méthodes d'Aitken et de Romberg.

   On saura faire le lien entre recherche de zéros et point fixe ; on connaitra l'énoncé du théorème de point fixe ainsi que sa démonstration. Grâce au lien entre constante de Lipschitz et dérivée via le théorème des accroissements finis (provenant d'une formule de Taylor), on verra la dérivation et l'intérêt de la méthode de Newton et fera le lien avec la vitesse de convergence. On verra les caractéristiques de différentes méthodes : convergence lente, mais localisation robuste versus convergence rapide si on est déjà proche de la solution. Divers exemples seront donnés ; en particulier, on verra l'intérêt de méthodes numériques pour la recherche de racines de polynômes.

   Les problèmes multi-dimensionnels ne seront pas abordés ; on privilégiera une maitrise plus approfondie du cas $1D$.
2. Pour l'approximation de fonctions, on suppose f connue sur un maillage $1D$ uniforme ou non et on cherche à obtenir une approximation de la fonction en d'autres points. On étudiera l'interpolation locale de Lagrange, avec construction explicite, erreur en h^{p+1} pour des données régulières, avec p le degré du polynôme utilisé ; on remarquera la perte du principe du maximum lorsque l'on augmente le degré, et la perte de vitesse de convergence lorsque les données sont moins régulières. On considérera le cas équidistant, en mettant en avant le phénomène de Runge, ainsi que l'utilisation des points de Tchebichev pour atténuer ce phénomène. L'utilisation de polynômes de Bernstein avec convergence en norme infinie en $1/\sqrt{n}$ sera aussi considérée. Enfin, on verra le cas d'interpolation trigonométrique : construction, lien avec les séries de Fourier et obtention d'une convergence en $O(n^{-r})$ pour r arbitraire pour des données régulières.

Compétences Savoir faire des exercices en lien avec les notions de cours précédentes. Faire des TP : implémentation des méthodes numériques ; obtention et interprétation des résultats numériques.

5.4 Séries entières et séries de Fourier

(36h de cours en amphi, 54h de TD)

Programme

1. Séries entières en tant que séries numériques : 3 semaines (9h CM, 14h TD)
   — Rappels sur la convergence des suites et séries dans $\mathbb{C}$. Définition des séries entières vues comme séries numériques dans $\mathbb{C}$.
   — Lemme d'Abel [1]. Définition du rayon de convergence et du disque de convergence. Convergence ou divergence dans le disque ou à l'extérieur. Exemples de comportement variés pour $|z| = R$.
   — Critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence. Exemple d'un cas où ça ne s'applique pas directement, $\sum z^{2n}$.
   — Comparaison de rayons de convergence pour $|a_n| \leq |b_n|$. "$\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence".
   — Définition du produit de Cauchy de deux séries entières. Comportement du rayon de convergence par somme et produit.
   — Définition de l'exponentielle complexe via sa série entière.
2. Étude de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies comme la somme d'une série entière : 4 semaines (12h CM, 18h TD)
   — Définition de la convergence simple pour une série de fonctions.
   — Ensemble de définition pour une fonction définie comme la somme d'une série entière (ie ensemble de $\mathbb{R}$ où la série numérique converge). Lien avec l'intervalle de convergence (ie le disque de convergence dans $\mathbb{R}$, $]-R,R[$). Lien avec la convergence simple de la série des fonctions $x \mapsto a_n x^n$.
   — Convergence normale d'une série de fonctions définies sur un segment $[a,b]$. La convergence normale implique la convergence simple mais la réciproque n'est pas vraie. Continuité de la somme. Intégrabilité et dérivabilité de la somme sur $[a,b]$.
   Ici, on fera bien attention à simplifier au maximum les énoncés et à admettre les preuves si besoin. En particulier, on n'introduira pas la convergence uniforme.
   — Convergence normale d'une série entière sur tout segment $[a,b]$ inclus dans l'intervalle de convergence.
   — Régularité de la somme de la série entière : continuité, dérivation et intégration terme à terme sur l'intervalle de convergence.
   Attention à bien détailler le passage de la continuité (resp. dérivabilité) sur tout segment $[a,b]$ à la continuité (resp. dérivabilité) sur l'ensemble de l'intervalle ouvert de convergence. Ce sera l'occasion de rappeler/préciser les définitions de la continuité (resp. dérivabilité) sur un intervalle $]a,b[$ et sur un intervalle $[a,b]$.
   — Si la série de terme général $a_n r^n$ converge alors $z \mapsto \sum_n a_n z^n$ est continue sur $[0,r]$ (démonstration admise). Continuité de la fonction somme d'une série entière sur son ensemble de définition. Exemple d'utilisation pour le calcul de sommes de séries numériques.
3. Développement en série entière d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: 2 semaines (6h CM, 9h TD)
   — Définition d'une fonction développable en série entière. Combinaison linéaire, produit, dérivée et primitive de fonctions développables en série entière. Inverse d'une fonction développable en série entière qui ne s'annule pas.
   On se contentera de définir les développements en série entière centrés en 0.
   — Série de Taylor et développement en série entière. Liens entre parité et coefficients.
   — Développement en série entière de fonctions usuelles : $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $\exp(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$. Exemples d'utilisation pour le calcul de somme de séries numériques.
4. Séries de Fourier : 3 semaines (9h CM, 13h TD).
   — Définition d'une fonction périodique, définition d'une fonction périodique continue par morceaux. La dérivée d'une fonction T-périodique est T-périodique. Contre-exemple pour une primitive. Si f est T-périodique et continue par morceaux, $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $(a_n r^n)$ est bornée, la série converge absolument pour $|z| < r$.

Dans cette partie, on mettra en évidence comment transformer une fonction T-périodique en une fonction 2π-périodique car dans la suite, les théorèmes ne seront énoncés que pour les fonctions 2π-périodiques.

— Étude de l'espace euclidien $\mathscr{D}$ des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et continues par morceaux telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$. Définition de la norme associée. La famille de fonctions $\mathscr{F} = \{x \mapsto 1,\ x \mapsto 2\sin(nx),\ x \mapsto 2\cos(nx), n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthonormée dans $\mathscr{D}$.
Attention, on ne s'intéressera qu'aux fonctions à valeurs réelles. L'introduction de cet espace euclidien permet d'éclairer la formule de Parseval et de donner un sens au séries de Fourier en terme de "projection" sur un sous-ensemble de fonctions mais le cadre est malgré tout "inadapté" faute de connaissances suffisante et les étudiants n'ont pas à maîtriser les propriétés de cet espace.

— Polynômes trigonométriques à valeurs dans $\mathbb{R}$. Lien entre coefficients du polynôme et produit scalaire avec les fonctions de $\mathscr{F}$.

— Coefficient de Fourier. Lien avec le produit scalaire. Exemple de calcul des coefficients de Fourier pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Liens entre parité et coefficients. Exemple des fonctions créneau et triangle.

— Définition de la série de Fourier d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux.

— Théorème de Dirichlet. Application au calcul de sommes. Phénomène de Gibbs.

— Convergence en moyenne quadratique pour f dans $\mathscr{D}$. Égalité de Parseval. Extension à toute fonction continue par morceaux. Application au calcul de sommes.
Dans ces preuves, on pourra admettre certains résultats comme la "densité" des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{D}$ ou l'interversion limite-intégrale dans le cas général. En cas de manque de temps, on pourra même admettre la démonstration et ne donner que les grandes idées. On pourra aussi choisir de tout démontrer si le temps le permet.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Le but de cette UE est que les étudiants sachent manipuler proprement les séries entières et les séries de Fourier mais pas qu'ils maîtrisent les démonstrations théoriques avec des suites ou séries de fonctions générales. Pour éviter les confusions nombreuses sur ces notions, on fera attention à bien noter la série numérique ou de fonctions (c'est-à-dire la suite des sommes partielles) $\sum x_n$ ou $\sum_{n\geq 1} x_n$, et la somme de la série (c'est à dire la limite) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. On fera également attention tant que possible à ne pas "confondre" la fonction f_n et la valeur $f_n(x)$.

Compétences A la fin de l'UE, les étudiants :

— savent déterminer et comparer le rayon de convergence de séries entières plus ou moins compliquées.

— savent calculer les coefficients de Fourier d'une fonction périodique.

— connaissent les propriétés des séries entières et séries de Fourier et peuvent les utiliser pour résoudre des problèmes (ie. calcul d'une somme ou résolution d'une équa diff) s'ils sont guidés.

— savent reconnaître le développement en séries entières des fonctions usuelles.

5.5 Maths en Jeans

(30h de TD)

Objectifs et attendus

Cette UE est basée sur la conception et la présentation effective d'une animation scientifique adaptée à un public varié, sur une thématique mettant en valeur l'importance des mathématiques dans la recherche du sens caché des choses, dans la modélisation du réel, la compréhension de phénomènes physiques divers, en permettant la construction de ponts intellectuels entre des mondes en apparence cloisonnés de la connaissance.

Les étudiants pourront utiliser l'ensemble des ressources à leur disposition à l'Université, aussi bien écrites (revues, livres, thèses, rapports de recherche...), que humaines (enseignants et chercheurs des différents laboratoires, étudiants d'autres filières...), comme aussi les informations qu'ils trouveront par ailleurs, sur le net en particulier, en apprenant à trier et synthétiser cette masse d'information. Certaines questions demanderont un approfondissement, amenant une recherche personnelle créative.

Si cela est possible, les travaux seront présentés sous forme d'animation interactive devant un public lors des sorties proposées au cours du semestre ; deux de ces présentations seront évaluées. Pour ces animations, les étudiants pourront réaliser le matériel de leur choix : posters, maquettes, documents à distribuer, diaporama, programmes informatiques, etc. L'association Maths pour Tous fera les impressions couleur (format A3), et prendra en charge les autres frais, sur accord préalable. Inclure le logo de l'association et celui de l'université sur tous les documents, et préciser l'origine des images utilisées.

Compétences

Deux choses à rendre une semaine avant le début des épreuves écrites :

Rendu de groupe :

- deux résumés du sujet : un court, et un plus long : 10 lignes
- une présentation plus détaillée : sous la forme d'un article pour une revue de vulgarisation scientifique (2 à 3 pages, bien illustrées), en mettant l'accent sur les apports originaux du groupe.
- un plan écrit des animations (explication, descriptifs, contenu, temps estimé, public, niveau scolaire, etc.), qui doit être utilisable par quelqu'un qui voudrait reproduire l'animation.

Rendu individuel :

- un compte rendu d'au moins deux activités extérieures proposées. 2 pages maximum
- un retour d'expérience sur la première animation d'évaluation : difficultés rencontrées, méthodes utilisées pour les surmonter, etc. (une analyse critique argumentée est attendue). 1 page.
- vous pouvez aussi rappeler votre méthodologie de travail pour la conception de l'animation, préciser la documentation utilisée (livres, revues, sites internet...), l'aide extérieure reçue (profs, autres étudiants...), etc., sans recopier le rapport de groupe. 1 page.

5.6 Chaînes de Markov

(12h de cours en amphi, 18h de TD)

Programme

Le cadre pour ce cours est celui des espaces d'états fini. Le cas des espaces d'états dénombrables ne sera pas abordé. Les chaînes de Markov seront homogènes.

1. Définitions et premières propriétés.
   (a) Propriété de Markov, définition d'une chaîne de Markov.
   (b) Chaînes de Markov homogènes, matrice de transition.
   (c) Calcul de la loi de la chaîne à un instant fixé.
   (d) Diagramme associé à une chaîne de Markov.
2. Classification des états.
   (a) Relation de communication entre les états : c'est une relation d'équivalence.
   (b) Notion d'état apériodique. Critères simples pour l'apériodicité. Admis : l'apériodicité est une propriété de classe.
   (c) États récurrents et transients. Exemples sur des diagrammes.
   (d) Existence d'un état récurrent.
   (e) La récurrence et la transience sont des propriétés de classe (avec preuve s'il y a le temps).
   (f) Notion de chaîne irréductible apériodique.
   (g) Quelques exemples numériques de trajectoires en temps long pour motiver la suite.
3. Mesures invariantes.
   (a) Définition d'une mesure de probabilité invariante, par les points de vue probabiliste (expliquer le sens du mot "invariante") et algébrique (vecteur propre à gauche).
   (b) Calcul explicite sur une chaîne à deux états.
   (c) Définition d'une mesure réversible. Les mesures réversibles sont invariantes. Exemples de chaînes non réversibles.
   (d) Théorème de Perron-Frobenius. Preuve dans le cas restreint où tous les coefficients sont strictement positifs.
   (e) Conséquence sur l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante.
4. Comportement en temps long.
   (a) Définition de la distance en variation totale.
   (b) Théorème de convergence en variation totale. Démonstration avec Perron-Frobenius.
   (c) Nombre de visites d'un état par une trajectoire.
   (d) Théorème ergodique (admis).

5.7 Statistique inférentielle

(12h de cours en amphi, 6h de TD, 12h de TP)

Programme

Ce cours est organisé autour des trois piliers de la statistique inférentielle : l'estimation ponctuelle, l'estimation ensembliste, et enfin les tests d'hypothèses. Ainsi, le programme suivant plus détaillé sera étudié :

I Introduction à la statistique inférentielle

1. Modèle statistique. Hypothèses statistiques, notion d'échantillon.
2. Indicateurs statistiques. Indicateurs de localisation, de dispersion, d'étendue.

II Estimation

1. Estimation ponctuelle
   (a) Méthode des moments. Méthode par identification. Propriétés des estimateurs.
   (b) Maximum de vraisemblance. Fonction de vraisemblance. Propriétés des estimateurs.
2. Estimation ensembliste
   (a) Pivot ou fonction pivotale. Convergence en loi. Distribution d'une statistique.
   (b) Intervalles de confiance. Définition, construction. Intervalle de confiance exact, intervalle de confiance asymptotique.

III Tests d'hypothèses

1. Notions introductives
   (a) Hypothèses de test, statistique de test, région de rejet.
   (b) Erreur de première espèce (niveau), erreur de deuxième espèce. Puissance.
2. Construction d'un test
   (a) Principe de construction
   (b) Étapes
   (c) Exemples
   (d) Conclusion
3. Tests statistiques célèbres

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Ce cours introductif à la statistique inférentielle nécessite la maitrise des principaux concepts de théorie des probabilités, et permet aux étudiants de mettre en application cette théorie pour résoudre des problèmes concrets. A travers ce cours, l'étudiant apprendra à poser un cadre théorique cohérent avec une observation statistique, en estimer les paramètres avec plus ou moins d'incertitude, et conclure à une prise de décision à l'aide d'un test statistique.

Compétences

Les compétences développées dans le cadre de ce cours sont aussi bien théoriques que pratiques. L'estimation par maximum de vraisemblance est abordée en profondeur, et sa mise en œuvre est stimulée par une série de travaux pratiques (en Python, ou R, ou les deux) permettant d'illustrer le comportement de la méthode. En sortie de cours, l'étudiant saura :

— Poser un cadre théorique statistique cohérent avec l'observation,
— Estimer les paramètres induits par le modèle statistique choisi,
— Proposer un intervalle de confiance pour l'estimation des paramètres,
— Poser un test d'hypothèses qui réponde à une décision pratique,
— Mettre en œuvre l'ensemble de cette mécanique statistique afin de prendre une décision.

5.8 Anthropocène

(6h de cours en amphi, 24h de TP en PA à 20 étudiants)

Programme

Cette Ue se propose de présenter dans un premier temps les enjeux actuels concernant la crise écologique et climatique. Des cours magistraux les introduiront à l'aide d'outils venant de différentes disciplines (physique, chimie, biologie, économie...).

Dans un second temps on se concentrera sur l'intérêt de la modélisation mathématique pour comprendre mieux ces enjeux. Deux modèles mathématiques concernant ces sujets seront étudiés par les étudiant.es en petits groupes, en suivant une pédagogie d'apprentissage par projet. Les étudiant.es seront amené.es à comprendre la modélisation mathématique du phénomène étudié, à utiliser leurs connaissances théoriques pour les analyser, à produire des simulations numériques, et finalement à critiquer positivement ou négativement le modèle étudié. Ces résultats serviront de base à une réflexion plus large sur les problématiques environnementales évoquées dans la première partie.

Objectifs et attendus

L'objectif de cette UE est d'engager les étudiant.es à une réflexion sur les enjeux actuels concernant la crise écologique et climatique. Cette réflexion sera initiée par des cours basés sur des connaissances pluridisciplinaires, et poursuivie dans un cadre disciplinaire avec l'étude de modèles mathématiques liés aux enjeux que l'UE a pour ambition d'aborder.

Connaissances du cours

- Les connaissances mathématiques sur lesquelles s'appuient l'étude des modèles proposés sont celles que les étudiant.es ont appris dans les cours antérieurs (en particulier leurs connaissances sur les équations différentielles). L'UE permet ainsi de revoir un certain nombre de notions fondamentales en mathématiques et de les mobiliser pour résoudre les problèmes posés.
- La partie programmation s'appuie sur le langage Python. Les étudiant.es en ont pour la plupart des notions mais une petite initiation est proposée à ceux et celles qui n'en ont pas les connaissances de base.

Compétences

- La deuxième partie de l'UE est enseignée en pédagogie d'apprentissage par projet. Les étudiant.es travaillent en groupe de 4, et sont amené.es à se répartir le travail et à collaborer.
- La programmation d'algorithmes, le tracé de figures claires à l'aide de Python sont des compétences mobilisées pendant l'UE.
- Les modèles étudiés seront toujours fournis (pas de modélisation au sens strict donc), mais les étudiant.es seront invité.es à comprendre partiellement les choix qui ont permis l'établissement de ces modèles. Ensuite, le lien sera fait entre les propriétés du modèle et les phénomènes qu'il modélise. Les étudiant·es devront finalement discuter les prévisions faites par les modèles étudiés et leur pertinence pour les phénomènes en cause.
- Des rendus de synthèse sont demandés sous forme écrite et/ou orale. La rédaction et la présentation des résultats ainsi que des étapes nécessaires à la construction des solutions proposées permettent de travailler l'écriture de preuves et résultats mathématiques ainsi que leur présentation orale.

6 Licence de Mathématiques - Parcours Maths Approfondies S5

6.1 Algèbre bilinéaire

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

Ce cours fait suite aux cours d'algèbre linéaire de S3 et S4. On travaillera uniquement sur $\mathbb{R}$.

- Généralités sur les formes bilinéaires : définition, expression en coordonnées, matrice associée. Formes bilinéaires symétriques et lien avec les matrices symétriques. Changement de base pour les matrices.
- Espaces euclidiens : définition d'un produit scalaire et de la norme associée. Inégalité de Cauchy–Schwarz et inégalité triangulaire. $4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$. Exemples : $\mathbb{R}^n$ euclidien, espaces de matrices, polynômes, polynômes trigonométriques.
  Orthogonalité, lien avec la somme directe. Bases orthonormées et expression du produit scalaire en coordonnées dans celles-ci.
- Isométries d'un espace euclidien : définition, exemples : symétries orthogonales, rotations. Matrices en base orthonormée. Isométries directes et indirectes. Classification des isométries en dimension 2. Forme réduite des isométries en dimension 3 (on pourra évoquer la forme réduite en toute dimension mais la démonstration de l'existence d'un plan stable devrait être considérée comme hors-programme).
- Opérateurs autoadjoints : définition, matrice en base orthonormée. Exemples : projecteurs orthogonaux. Préservation de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Existence d'un vecteur propre réel et théorème spectral. Forme matricielle du théorème spectral.
- Formes quadratiques réelles : forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique, expression en coordonnées. Polarisation, correspondance entre formes quadratiques, formes bilinéaires symétriques et matrices symétriques.
  Noyau d'une forme bilinéaire symétrique, notion de forme non dégénérée. (Il faudra traiter quelques exemples isotropes en dimensions ≤ 3 en exercice).
  Réduction en base orthonormée avec le théorème spectral. Calcul explicite en dimension 2.
  Algorithme de Gauss pour la réduction (on soulignera la différence avec la réduction en base orthonormée). Signature d'une forme non dégénérée (la loi d'inertie de Sylvester peut être admise).
  Application : classification des coniques euclidiennes. Exemples de quadriques.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

La définition abstraite de forme bilinéaire et le lien avec l'expression en coordonnées doivent être compris. Les notions et résultats fondamentaux sur les espaces euclidiens (produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, isométries, opérateurs autoadjoint) doivent être assimilés ainsi que le lien avec la géométrie du plan et de l'espace.

Les démonstrations "élémentaires" (celles qui suivent immédiatement des définitions données) devraient pouvoir être reproduites avec aisance par les étudiants (par exemple il faut savoir immédiatement montrer qu'une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est, que les isométries ou opérateurs autoadjoints préservent l'orthogonal d'un sous-espace stable, ou que des sous-espaces orthogonaux sont en somme directe...). Certaines démonstrations plus conséquentes mais élémentaires (classification des isométries planes, Cauchy–Schwarz) devraient aussi être connues. Les démonstrations plus élaborées (théorème spectral en particulier) ne sont pas exigibles.

Le lien de l'orthogonalité avec les équations de sous-espaces pourra être évoqué dans des exercices mais il n'est pas question d'étudier la dualité en général.

Compétences

Du point de vue calculatoire il faut savoir :

- Calculer l'orthogonal d'un sous-espace.

— Utiliser l'algorithme de Gram–Schmidt pour donner une base orthonormée (en particulier pour les espaces de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ou 3 au maximum).
— Reconnaître une isométrie et donner ses éléments géométriques en dimension 2 et 3 (axe, angle pour les rotations ; miroir pour les réflexions).
— Réduire une conique euclidienne (c'est à dire déterminer son type et trouver les axes).
— Déterminer la signature d'une forme quadratique en 3 variables.

Du point de vue plus théorique il s'agit de continuer la formation à la réflexion dans un cadre abstrait guidée par l'intuition géométrique entamée dans les UEs d'algèbre linéaire des semestres 3 et 4.

6.2 Théorie des groupes

(12h de cours en amphi, 18h de TD)

Programme

- Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, exemples (groupe cyclique, groupe monogène, groupe additif des entiers modulo n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, groupe des racines n-ièmes de l'unité, groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$, éventuellement groupe diédral si le temps le permet). Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$. Groupe produit.
- Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.
- Groupe engendré par une partie. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Groupe des bijections d'un ensemble. Groupe symétrique S_n. Représentation des permutations sous la forme d'un tableau à deux lignes, composition, inverse. Théorème de Cayley.
- Définitions de transposition, d'un cycle, du support d'une permutation. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Les permutations à supports disjoints commutent. Deux cycles de même longueur sont toujours conjugués. Le groupe S_n est engendré par les transpositions.
- Signature d'une permutation. Groupe alterné.
- Ordre d'un élément, calcul dans les groupes symétriques et les groupes cycliques.
- Si H est un sous-groupe de G, on définit les classes à droite (resp. à gauche). Indice d'un sous-groupe. Exemples pour des sous-groupes de S_3 et S_4. Théorème de Lagrange (on verra les relations d'équivalence dans le cours qui suit, "Groupes, anneaux, corps"). Application : dans un groupe fini, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Les définitions, théorèmes doivent tous être connus parfaitement. Les démonstrations doivent être comprises.

Compétences

On attend des étudiants d'être capable de mettre en pratique les notions du cours dans des exemples simples : par exemple calculer l'ordre d'une permutation ou d'un élément dans un groupe fini explicitement donné, de déterminer les générateurs d'un groupe explicitement donné.

Au delà de ces aspects calculatoires, on attend aussi des étudiants une compréhension des concepts introduits dans ce cours, et qui seront évalués dans des situations plus formelles que celles des exemples précités.

6.3 Suites et séries de fonctions

(36h de cours en amphi, 54h de TD)

Programme

1. Suites et séries de fonctions : 5 semaines (16h CM, 24h TD).
   — Premiers exemples de suites de fonctions. Convergence simple.
   Afin d'introduire et de motiver la suite du cours, avant toute formalisation, il est important de détailler des exemples de suites de fonctions qui convergent simplement (mais pas uniformément) et de montrer que certaines propriétés des termes de la suite de fonctions ne sont donc pas conservées pour la limite (fonctions bornées, limite en un point ou en l'infini, continuité, valeur de l'intégrale, ...). Ces exemples pourront être repris tout au long du cours.
   — Convergence uniforme. Exemples et contre-exemples, notamment $(t \mapsto t^n)$ sur $[0,1]$. La convergence uniforme implique la convergence simple. Contre-exemple pour l'implication inverse.
   — Convergence uniforme et continuité. Exemple de fonction convergeant uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$ mais ne convergeant pas uniformément sur $]0,+\infty[$ et application à la continuité de la limite de ces fonctions sur $]0,+\infty[$.
   — Théorème d'interversion de limites en un point adhérent à l'ensemble de définition.
   La notion d'adhérence d'un ensemble de $\mathbb{R}$ a été introduite dans l'UE "Suites et fonctions d'une variable réelle" du S3 mais pourra être rappelée.
   — Convergence uniforme et intégration sur un segment $[a,b]$ pour une suite de fonctions continues. Convergence et primitive.
   — Suite de fonctions et dérivation.
   On énoncera aussi explicitement les corollaires pour les suites de fonctions de classe C^k.
   — Séries de fonctions. Convergence simple. Convergence absolue. Convergence uniforme. Exemples pour montrer que ces notions ne sont pas équivalentes.
   — Convergence normale. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue. Contre-exemple pour l'implication inverse.
   — Continuité, dérivation, intégration d'une série de fonctions.
   Les théorèmes seront précisément énoncés dan le cadre des séries même si les démonstrations découlent immédiatement des résultats sur les suites de fonctions.
   — Exemples à détailler : fonction zêta ; $\sum \frac{x^n}{n!}$ et vérifier qu'on retrouve l'exponentielle réelle.
   Au S1 dans l'UE "Mathématiques générales", l'exponentielle a été définie comme l'unique fonction dérivable telle que $f'=f$ avec $f(0)=1$.
2. Convergence dans un espace vectoriel normé : 1,5 semaines (4h CM, 6h TD)
   — Définition d'une norme sur un espace vectoriel. Exemple du module sur $\mathbb{C}$. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{R}^n$. Exemples des normes de matrices ou des normes d'applications linéaires. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
   — Définition de la convergence d'une suite d'un evn à l'aide des normes. Théorème sur l'équivalence des normes en dimension finie (admis). Équivalence avec la convergence coordonnée par coordonnée dans un evn de dimension finie.
   Le théorème sur l'équivalence des normes sera démontré dans l'UE de "Topologie" du S6.
   — Équivalence entre convergence uniforme et convergence pour la norme infinie dans l'espace des fonctions bornées. Définition de la convergence en norme quadratique ou en norme 1 pour des fonctions continues sur $[a,b]$. Démonstration que toutes ces normes ne sont pas équivalentes.
3. Séries entières : 4 semaines (12h CM, 18h TD)
   — Rappels sur la convergence des sommes dans $\mathbb{C}$. Définition des séries entières comme série numériques dans $\mathbb{C}$.

— Lemme d'Abel [2]. Définition du rayon de convergence et du disque de convergence. Convergence ou divergence dans le disque ou à l'extérieur. Exemples de comportements variés pour $|z| = R$.
— Critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence. Exemple d'un cas où ça ne s'applique pas directement, $\sum z^{2n}$.
— Comparaison des rayons de convergence de deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $a_n \leq b_n$. Comparaison des rayons de convergence pour $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$.
— Définition du produit de Cauchy de deux séries entières. Comportement du rayon de convergence par somme et produit.
— Étude de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies comme la somme d'une série entière (donc vue comme une série de fonctions). Ensemble de définition pour de telles fonctions (ie ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge) et lien avec l'intervalle de convergence (ie le disque de convergence dans $\mathbb{R}$, $]-R,R[$). Convergence normale sur tout segment $[a,b]$ inclus dans l'intervalle de convergence.
— Régularité de la somme de la série entière : continuité, dérivation et intégration terme à terme sur l'intervalle de convergence.
— Théorème d'Abel [3]. Continuité de la fonction somme d'une série entière sur son ensemble de définition.
La transformation d'Abel pourra être utilisée dans la démonstration du théorème d'Abel mais cette formule n'est pas à connaître pour les étudiants.
— Développement en série entière d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Combinaison linéaire, produit, dérivée et primitive de fonctions développables en série entière.
On se contentera de définir les développements en série entière centrés en 0.
— Série de Taylor et développement en série entière. Liens entre parité et coefficients.
— Développement en série entière de fonctions usuelles : $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $\exp(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$. Exemples d'utilisation pour le calcul de somme.
— *En fonction du temps disponible :* définition de l'exponentielle complexe via sa série entière. Propriétés.

4. Introduction aux séries de Fourier : 1,5 semaines (4h CM, 6h TD).
— Définition d'une fonction périodique, définition d'une fonction périodique continue par morceaux. La dérivée d'une fonction T-périodique est T-périodique. Contre-exemple pour une primitive. Si f est T-périodique et continue par morceaux, $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Dans cette partie, on mettra en évidence comment transformer une fonction T-périodique en une fonction 2π-périodique car dans la suite, les théorèmes ne seront énoncés que pour les fonctions 2π-périodiques.
— Définition du noyau de Dirichlet $t \mapsto D_n(t)$. Valeur moyenne. Expression comme quotient de sinus, et décroissance uniforme loin de $2\pi\mathbb{Z}$.
— Produit de convolution $D_n * f$ pour une fonction f continue. Définition du coefficient de Fourier $c_n(f)$ puis expression de $D_n * f$ comme polynôme trigonométrique.
— Théorème de Dirichlet pour $f \in \mathscr{C}^0 \cap \mathscr{C}^1_{pm}$. Exemple des fonctions triangles.
— Théorème de Dirichlet dans le cas $f \in \mathscr{C}^1_{pm}$. Exemple des fonctions créneaux.
— Application au calcul de sommes.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

— Attention, la notion de norme pour un espace euclidien en dimension finie sera introduite en parallèle de cette UE dans l'UE "Algèbre bilinéaire".
— Les notions de base de topologie et en particulier, la convergence des suites d'un evn et l'équivalence des normes en dimension finie ne seront étudiées en détails qu'au semestre suivant dans l'UE de topologie. Dans cette UE, on se contentera de mettre en évidence les différences entre la dimension finie et la dimension infinie.
— Attention, les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou la convergence des suites de $\mathbb{C}$ n'auront été abordées dans l'UE "Suite et fonctions" du S3 que "s'il reste du temps". Il est donc important de revenir sur ces notions quand on veut les

2. Si $(a_n r^n)$ est bornée, la série converge absolument pour $|z| < r$.
3. Si la série de terme général $a_n r^n$ converge alors la série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,r]$.

utiliser.

— Les définitions, proposition et théorème du cours doivent être parfaitement maîtrisés. Les exemples du cours doivent être bien compris et revenir facilement en mémoire pour servir de contre-exemple si besoin.

— Le chapitre sur les séries de Fourier peut ne pas être abordé, ou bien être abordé comme de la culture générale si le temps manque. Si le chapitre est abordé, on se concentrera sur le lien avec les notions vues dans le cours sur la convergence simple, uniforme ou normale mais on n'abordera pas la théorie L^2 difficile à comprendre réellement sans les espaces de Hilbert.

Compétences

1. À l'issue du cours, les étudiants savent comment prouver la convergence (simple ou uniforme) d'une suite de fonction. Ils savent comment prouver la convergence normale d'une série de fonctions.
2. Ils savent également prouver qu'une limite d'une suite de fonctions ou la somme d'une série de fonctions est continue (ou dérivable), ou ils savent en calculer l'intégrale. Dans le cas où la convergence uniforme n'est vérifiée que pour des sous-domaines du type $[a,+\infty[$ ou $[0,a]$ pour tout $a>0$ (à préciser dans l'énoncé de l'exercice pour guider les étudiants), les étudiants sont capables de montrer la continuité de la fonction limite.
3. Ils savent calculer le rayon d'une série entière simple. Ils connaissent les propriétés des fonctions définies par une série entière sur leur ensemble de définition.
4. Ils savent retrouver le développement en série entière (DSE) d'une fonction usuelle. Si on les guide, il savent calculer le DSE d'une fonction réciproque ou inverse. Si on leur demande de repérer une symétrie de la fonction, ils savent utiliser cette symétrie pour simplifier le calcul de son DSE.
5. Les étudiants sont capables de calculer la limite de certaines séries en utilisant le développement en série entière et si besoin le théorème d'Abel, mais dans ce cas ils sont guidés par l'énoncé.

6.4 Équations différentielles

(12h de cours en amphi, 12h de TD, 6h de TP)

Programme

Première partie : Résolution exacte d'équations différentielles (2h CM, 6h TD)

- Définition d'équation différentielle du premier ordre ; condition de Cauchy (ou condition initiale) ; problème de Cauchy ; solution maximale ; équations à variables séparables ; exemples.
  Parmi les exemples incontournables pour la suite du cours, les équations du type $y' = y^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ (pour la non-unicité) ou $\alpha > 1$ (pour l'explosion en temps fini) devraient être étudiées au moins pour des choix pertinents du paramètre α.
- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus : $y' + ay = b$. Résolution de l'équation sans second membre. Méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation générale.
  D'autres exemples d'équations différentielles pouvant se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 par changement de variable ou résolutions successives (système d'équations linéaires, équations linéaires d'ordre 2 (voire n) à coefficients constants, ...) pourront être abordés en cours ou en TD.

Deuxième partie : Le théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension 1 et ses conséquences (6h CM, 6h TD)

- Équations différentielles de la forme $x' = f(t,x)$ sur $I \times \Omega$ avec I et Ω des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Définition d'une fonction de classe C^1 en (t,x). Théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz pour des fonctions de classe C^1. Unicité de la solution maximale.
  Attention, les étudiants n'ont jamais vu les fonctions de plusieurs variables (ni même les normes dans $\mathbb{R}^2$). L'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz sera donc fait pour des fonctions de classe C^1 et uniquement en dimension 1 d'espace. La démonstration sera admise.
- Théorème des bouts (ou de sortie de tout compact ou d'explosion en temps fini) en dimension 1. Lemme de Gronwall en dimension 1. Application à l'existence de solutions globales. Exemple d'étude qualitative de solutions.
  Les démonstrations des théorèmes pourront être admises en cas de manque de temps. L'étude qualitative des équations différentielles en dimension 1 sera toujours guidée par des questions précises.

Troisième partie : Résolution approchée d'équations différentielles en dimension 1. (4h CM, 6h TP)

- Schéma d'Euler explicite. Définition de la notion de convergence d'un schéma. Preuve de la convergence à l'ordre 1 du schéma d'Euler explicite.
- Définition du schéma d'Euler implicite. Comparaison des schémas explicite et implicite pour les équations $y' = \lambda y$.
- TP en python : Résolution numérique d'une équation différentielle par le schéma d'Euler, étude expérimentale de l'erreur et de l'ordre de convergence. Résolution d'une équation différentielle issue d'un contexte appliqué (dynamique des populations, mécanique ou économie) et interprétation des solutions dans ce contexte.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

- Il faut connaître et maîtriser parfaitement les définitions, les méthodes et les théorèmes du cours. Il faut savoir refaire les exemples donnés dans le cours.
- Cette UE est l'occasion de revenir sur des calculs d'intégrales. En revanche, les fonctions de plusieurs variables n'ont pas encore été étudiées précisément. Seule la notion d'une application générale d'un ensemble dans un autre a été introduite en S2. Les fonctions de plusieurs variables pourront donc être utilisées mais avec prudence.
- La notion de norme et d'espace euclidien n'est introduite qu'en parallèle de cette UE et ne pourra donc être utilisée qu'avec prudence et après un certain délai. Dans tous les cas, la notion de norme ne doit pas être considérée comme maîtrisée.
- La notion de différentielle est complètement au delà du programme et ne pourra donc pas être utilisée. De même, les notions de bases de topologie (ouvert, fermé, etc) ne sont pas connus des étudiants et ne seront vues qu'au

semestre suivant. Ces notions ne doivent donc pas être utilisées. Seuls les intervalles ouverts voisinages de chacun de leurs points ont été introduits dans l'UE "Suite et fonctions" du S3.

— Des TP en Python sont prévus pour la partie numérique sur la méthode d'Euler.

— La première partie du cours doit rester calculatoire. Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 ont déjà été abordées en S2 Descartes dans l'UE "Suites, intégration et systèmes linéaires" mais rapidement et uniquement pour retravailler l'intégration. Ici, le but est que les étudiants maîtrisent les techniques de base pour résoudre des équations différentielles classiques de façon autonome et qu'ils aient quelques exemples qui serviront de référence pour la suite du cours. L'utilisation des équations d'ordre 1 pour résoudre des équations ou systèmes d'équations plus compliquées pourra ne pas être traitée en cas de manque de temps.

— La deuxième partie doit introduire à l'étude qualitative des équations différentielles sur des exemples simples : existence globale de solutions ou explosion en temps fini, monotonie des solutions et convergence vers un "équilibre" (la notion ne sera pas nécessairement introduite), exemple de tracé de solutions en fonction du temps, etc.

— La troisième partie portera aussi bien sur l'étude théorique des schémas d'Euler que sur une étude numérique d'une équation différentielle issue d'un contexte appliqué.

Compétences

1. Savoir résoudre une équation à variable séparable ou une équation linéaire du premier ordre sans aide.
2. Connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des équations différentielles en dimension 1 en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation. Il faut savoir expliquer comment ce théorème s'applique dans le contexte de l'exercice, notamment en explicitant la fonction $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $x'(t) = f(t,x(t))$, tout en prenant soin de distinguer la variable x et la fonction $x : t \mapsto x(t)$.
3. Savoir programmer la méthode d'Euler explicite en dimension 1.
4. Savoir résoudre numériquement une équation différentielle à l'aide de Python (via la commande `ode` de la librairie `scipy` ou équivalent) en dimension 1 et interpréter les résultats.

6.5 Maths discrètes et algorithmique

(12h de cours en amphi, 18h de TP)

Cette UE vise à travailler les compétences en algorithmique et programmation en revisitant et complétant les acquis mathématiques des années précédentes, principalement en arithmétique et en algèbre. La mise en oeuvre utilise le langage Python, et s'appuie sur les compétences acquises dans l'UE d'Algorithmique et programmation 1 suivie en L2 Mathématiques.

Programme

- Mise en route : calcul du n-ième terme de la suite de Fibonacci par des définitions récursive et itérative ; comparaison avec les résultats obtenus pour l'expression fonctionnelle (formule de Binet).
- Entiers relatifs : représentations d'un entier (décimal, binaire, en base quelconque), algorithme de division euclidienne à partir de $(+,-,<)$, conversions entre bases, pgcd, tests de primalité et algorithme naïf de factorisation (discussion de la complexité). Réalisation en Python d'une sélection des algorithmes étudiés.
- Arithmétique modulaire : caractérisation des sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$, rappel de la définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, opérations héritées de $\mathbb{Z}$, générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, groupe multiplicatif, inverse modulaire (calcul par l'algorithme d'Euclide étendu), lemme chinois (démonstration effective et implémentation), indicatrice d'Euler (calcul de $\phi(p)$ avec p premier, $\phi(p^n)$, $\phi(mn)$, cas général, discussion de la complexité).
- Polynômes en une indéterminée $\mathbf{K}[X]$: opérations de base, division euclidienne et calcul du pgcd, et discussion de la structure pertinente sur $\mathbb{K}$ pour réaliser ces opérations. Réalisation en Python dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Étude d'un algorithme avancé (par exemple : RSA ou Reed-Solomon) : prérequis mathématiques, principe de l'algorithme, implémentation, discussion de la robustesse.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Ce cours contient assez peu de contenu mathématique nouveau, et n'introduit pas de connaissance nouvelle en informatique et programmation. Il s'agit plutôt de consolider les acquis mathématiques en variant le point de vue, et de développer une certaine aisance dans la pratique de la programmation dans un contexte mathématique.

Compétences Á l'issue de cette UE, on s'attend à ce que les étudiants validant le cours soient capables de :

- mobiliser leurs connaissances mathématiques en algèbre et arithmétique pour établir ou contester la correction d'un algorithme ou d'un programme ;
- identifier, parmi les définitions et résultats qu'ils mobilisent en mathématiques, ceux qui sont présentés de manière effective, et donc directement susceptibles d'êtres réalisés algorithmiquement ;
- transcrire un algorithme élaboré (du niveau de ceux abordés explicitement dans leur cursus) en programme Python ;
- proposer ou critiquer des choix d'implémentation pour cette dernière tâche : types de données, structuration du programme, appel à des bibliothèques externes, *etc.*

7 Licence de Mathématiques - Parcours Maths Approfondies S6

7.1 Structures algébriques

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

1. Anneaux (2 semaines) :
   (a) Définition d'un anneau, sous-anneau ; exemples.
   (b) Inversibilité, diviseur de zéro ; anneau intègre, corps.
   (c) Morphisme d'anneaux.
   (d) Idéal (à partir de maintenant on se restreint aux cas des anneaux commutatifs unitaires) ; idéal engendré par une partie ; anneaux principaux.
2. Quotients d'anneaux (3 semaines) :
   (a) Relation d'équivalence en général ; espace quotient. Exemples.
   (b) Relation d'équivalence induite par un idéal ; anneau quotient.
   (c) Premier théorème d'isomorphisme.
3. Polynômes (3 semaines) :
   (a) Anneau des polynômes sur un anneau commutatif unitaire A ; exemple anneau $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$; division euclidienne par un polynôme unitaire dans $A[X]$.
   (b) $\mathbb{K}[X]$ est principal.
   (c) Exemples de quotient d'anneaux de polynômes, et utilisation de la division euclidienne pour se représenter un quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$ où P est un polynôme.
   (d) $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps ssi P est irréductible ; exemples
4. Polynômes d'endomorphismes linéaires (3 semaines) :
   (a) On considère ici un espace vectoriel E de dimension finie n, et f un endomorphisme de E. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(f)$. Si λ est valeur propre de f, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de f.
   (b) Lemme des noyaux ; exemples des projections, symétries ; f est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.
   (c) L'application $\Psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[f]$, définie par $\Psi(P) = P(f)$, est un morphisme d'anneaux et un morphisme d'espaces vectoriels. On en déduit l'existence d'un polynôme minimal ; les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres de f ; exemples
5. Quotients de groupes (1 semaine)
   (a) Relations d'équivalence sur un groupe G induite par un sous-groupe H : classe à droite et classes à gauche. Exemples montrant que $gH \neq Hg$ en général.
   (b) Sous-groupes distingués ; relation de groupe sur G/H si H est distingué dans G.
   (c) Premier théorème d'isomorphisme.
   (d) Quelques exemples (espaces vectoriels et groupes cycliques, par exemple).

Objectifs et attendus

Connaissances du cours La partie importante de ce cours concerne les anneaux, dont les anneaux de polynômes. L'utilisation de ces notions pour l'étude des polynômes d'endomorphismes est aussi importante. La partie sur les groupes quotient est informative et permet de faire le parallèle avec les anneaux quotients. Les étudiants auront vu la notion de sous-groupe distingué et de groupe quotient, mais on n'exigera pas une maîtrise poussée de ces notions dans les exercices. La partie sur les polynômes n'a pas pour objectif de reprendre l'arithmétique des polynômes en détail (qui a été vue en

L2), mais surtout de montrer comment se faire des représentations des quotients d'anneaux de polynômes. Néanmoins on fera des rappels sur l'arithmétique des polynômes.
L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ seront étudiés en TD, en particulier l'ensemble de ses inversible, ainsi que le théorème des restes chinois.
Compétences Il faut tout d'abord être capable de vérifier les définitions et d'appliquer les énoncés du cours dans des cas simples. À ce niveau, les étudiants connaissent plusieurs structures algébriques : les espaces vectoriels, les groupes, les anneaux. Il faut bien comprendre les différences entre elles, en particulier sur des exemples. Il est essentiel de comprendre comment ces différentes structures permettent de montrer l'existence du polynôme minimal d'un endomorphisme via le morphisme $\Psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[f]$.

7.2 Analyse numérique MA

(12h de cours en amphi, 6h de TD, 12h de TP)

Programme

1. Approximation d'un nombre (6h CM 6h TD 3h TP)
   — Vitesse de convergence d'une suite réelle
   — Approximation d'un nombre qui est solution d'une équation : point fixe, Newton.
2. Approximation de fonction (6h CM 6h TD 3h TP)
   — polynômes (Lagrange, Bernstein)
   — polynômes trigonométriques.

Objectifs et attendus
Connaissances du cours

1. On cherche d'abord à savoir comment se comporte une suite convergente : converge-t-elle rapidement ou non ? A l'aide de la croissance comparée entre exponentielle, puissance et logarithme, on sera familier avec le comportement des suites types suivantes : $\frac{1}{\ln(n)^a}$, $\frac{1}{n^a}$, k^n, $\frac{1}{n!}$, $\frac{1}{n^n}$, k^{2^n}, $0 < k < 1$; pour d'autre suites, on aura le réflexe de les situer par rapport à ce type de suites. On saura traiter les suites linéaires d'ordre k via la diagonalisation/jordanisation de la matrice sous-jacente. A l'aide du quotient $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^p}$, on introduira les notions de convergence linéaire ($p = 1$) et quadratique ($p = 2$) et on saura faire le lien avec le nombre de chiffres de Digits de précision que l'on gagne à chaque étape.

   On saura faire le lien entre recherche de zéros et point fixe ; on connaitra l'énoncé du théorème de point fixe ainsi que sa démonstration. Grâce au lien entre constante de Lipschitz et dérivée via le théorème des accroissements finis (provenant d'une formule de Taylor), on verra la dérivation et l'intérêt de la méthode de Newton et fera le lien avec la vitesse de convergence. On verra les caractéristiques de différentes méthodes : convergence lente, mais localisation robuste versus convergence rapide si on est déjà proche de la solution. Divers exemples seront donnés ; en particulier, on verra l'intérêt de méthodes numériques pour la recherche de racines de polynômes.

   Les problèmes multi-dimensionnels ne seront pas abordés ; on privilégiera une maitrise plus approfondie du cas $1D$.
2. Pour l'approximation de fonctions, on suppose f connue sur un maillage $1D$ uniforme ou non et on cherche à obtenir une approximation de la fonction en d'autres points. On étudiera l'interpolation locale de Lagrange, avec construction explicite, erreur en h^{p+1} pour des données régulières, avec p le degré du polynôme utilisé ; on remarquera la perte du principe du maximum lorsque l'on augmente le degré, et la perte de vitesse de convergence lorsque les données sont moins régulières. On considérera le cas équidistant, en mettant en avant le phénomène de Runge, ainsi que l'utilisation des points de Tchebichev pour atténuer ce phénomène. L'utilisation de polynômes de Bernstein avec convergence en norme infinie en $1/\sqrt{n}$ sera aussi considérée. Enfin, on verra le cas d'interpolation trigonométrique : construction, lien avec les séries de Fourier et obtention d'une convergence en $O(n^{-r})$ pour r arbitraire pour des données régulières.

Compétences Savoir faire des exercices en lien avec les notions de cours précédentes. Faire des TP : implémentation des méthodes numériques ; obtention et interprétation des résultats numériques.

7.3 Épreuve intégrative S6

(3h cours en amphi, 18h de TD, 1h de pédagogie active (PA) par groupes de 3 étudiants)

Programme Le programme de cette UE est de proposer des épreuves écrites longues, présentées sous forme de problèmes (par exemple des épreuves de type CAPES ou de concours d'école d'ingénieur), ayant lieu de manière périodique et faisant référence aux cours de L1 et de L2. Un des objectifs de cette Ue est de préparer les étudiant.e.s à des épreuves écrites de concours. Il y aura 3 épreuves de 3h chacune réparties durant le semestre. Il y aura 3h de CM pour présenter l'UE, donner des conseils pour effectuer ce type d'épreuve, donner des conseils de rédaction mathématiques, et faire les rappels de mathématiques nécessaires aux trois épreuves. L'enseignant.e rédigera des corrigés des sujets donnés qui seront distribuées aux étudiant.e.s à la fin des épreuves écrites.

Pour chacune des trois épreuves écrites, l'enseignant.e rédigera un corrigé du sujet qui sera distribué aux étudiant.e.s à l'issue de l'épreuve, corrigera ensuite les copies, puis proposera des séances de remédiation sous plusieurs formes :

- Une séance collective de TD portant sur les erreurs les plus fréquentes des étudiant.e.s, développant au tableau la correction de certaines questions et donnant aussi éventuellement quelques compléments qui pourraient s'avérer nécessaires.
- Des séances de remédiation en petits groupes d'étudiants, voire des retours individuels, qui permettront d'analyser en détail chaque copie et d'indiquer précisément à l'étudiant.e les points à améliorer dans son travail.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Le programme des épreuves doit concerner les points vus en L1 et L2, et plus particulièrement les suivants :

1. L'algèbre linéaire en dimension finie
2. L'analyse d'une variable réelle
3. l'arithmétique élémentaire
4. l'utilisation des quantificateurs
5. les opérations booléennes sur les ensembles et sur les applications
6. les différents types de raisonnement

Compétences L'objectif principal de cette UE est le travail la rédaction mathématique, et de faire manipuler dans un même problème des connaissances apprises les années précédentes dans des UE différentes. Les retours individualisés pourront permettre aux étudiant.e.s d'améliorer significativement leur rédaction. Une attention particulière sera donc donnée à la rédaction. Mais il y aura aussi une évaluation de la capacité qu'ont les étudiant.e.s à manipuler les points cités précédemment.

7.4 Intégration de Lebesgue et calcul différentiel

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

Intégration de Lebesgue (6 semaines soit 12h CM, 18h TD) On discute de la notion de mesure, on admet l'existence de la mesure de Lebesgue, on montre comment construire l'intégrale de Lebesgue de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, puis on étudie ses propriétés et notamment les théorèmes de convergence.

1. Introduction à la notion de mesure sur $\mathbb{R}$: si $A \subset \mathbb{R}$, on veut définir la "taille" de A ou la "mesure" de A, notée $\mu(A)$. On voudrait que certaines propriétés soient vérifiées :

   (a) on souhaiterait que la mesure soit additive : si A et B sont des parties disjointes de $\mathbb{R}$, on voudrait $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

   (b) on souhaiterait que cette mesure soit invariante par translation : si $A \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on voudrait $\mu(A+t) = \mu(A)$.

   On peut éventuellement rajouter que la mesure est σ-additive, ce qui permet de rendre la mesure compatible avec des limites.
   Si on veut généraliser l'additivité à un nombre infini de parties disjointes, on a des problèmes (donner des exemples). Si on veut pouvoir donner la mesure de toutes les parties de $\mathbb{R}$, on a des problèmes. Il faut donc préciser les parties de $\mathbb{R}$ que l'on veut pouvoir mesurer, donner la définition de la mesure, et préciser ses propriétés.
   Théorème (admis) : *il existe une famille $\mathscr{M}$ de parties de $\mathbb{R}$, qu'on appelle* parties mesurables*, qui contient les intervalles de $\mathbb{R}$, qui est stable par passage au complémentaire et par unions dénombrables, et une fonction $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

   (a) *pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mu(I) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est la longueur de I.*

   (b) *pour toute famille dénombrable d'ensembles mesurables E_n, on a*

   $$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n).$$

   Cette mesure μ est définie de la manière suivante (admis) : pour E mesurable

   $$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{I \in \mathscr{F}} \mu(I) \mid \mathscr{F} \text{ est une famille d'intervalles qui recouvrent } E\right\}.$$

2. Propriétés de la mesure de Lebesgue (admises).

3. Construction formelle de l'intégrale sur $\mathbb{R}$:

   (a) Définition des fonctions étagées ; intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée. Propriétés de celles-ci : indépendance vis-à-vis de la représentation de la fonction étagée, linéarité, additivité, croissance (si $\phi(x) \leq \psi(x)$ pour tout x, alors $\int \phi \leq \int \psi$), inégalité triangulaire ($|\int \phi| \leq \int |\phi|$).

   (b) Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives.

   (c) Théorème de convergence monotone.

   (d) Linéarité de l'intégrale.

   (e) Lemme de Fatou.

   (f) Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables à valeurs complexes.

   (g) Théorème de la convergence dominée.

   (h) Les fonctions Riemann intégrables sur un segment sont Lebesgue intégrables sur ce segment et les intégrales coïncident ; idem pour les intégrales généralisées de fonctions positives.

Calcul Différentiel (6 semaines soit 12h CM, 18h TD) Cette partie a pour objectif d'introduire à la notion de différentielle pour familiariser les étudiants avec ce concept.

1. Pour $f : (E, \| \|_E) \longrightarrow (F, \| \|_F)$ une application entre deux espaces vectoriels normés, on rappelle la définition de continuité, et on donne la définition de différentiabilité.

   Attention, la notion d'evn a été introduite au S5 dans l'UE "Suites et séries de fonctions" mais n'est étudiée réellement qu'au S6 dans l'UE "Topologie" en parallèle de cette UE. Il faudra donc bien se coordonner entre enseignants pour que la continuité ait bien été traitée avant la différentiabilité.

2. Nombreux exemples. Dans ce cours, E et F ne sont pas nécessairement de dimension finie, mais on considérera (presque) exclusivement des exemples en dimension finie. En voici certains possibles :

   (a) les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (b) L'application $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in M_n(\mathbb{R})$.

   (c) L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle AX, X \rangle \in \mathbb{R}$ pour une matrice A symétrique ou non.

   (d) L'application $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 \mapsto AB \in M_n(\mathbb{R})$.

3. Différentielle d'une combinaison linéaire ou d'une composée de fonctions différentiables.

4. Fonctions de plusieurs variables. Dérivées partielles d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow F$. Matrice jacobienne. Lien entre différentielle et dérivées partielles.

5. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Lemme de Schwarz (admis). Formule de Taylor-Young (admis).

6. Lien avec l'intégration : Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre ; Fubini ; Changement de variables dans une intégrale (uniquement s'il y a la place).

Objectifs et attendus

Connaissances du cours L'objectif de ce cours est de présenter aux étudiants l'intégration de Lebesgue et les fondements du calcul différentiel de sorte qu'ils en aient déjà une première vision avant d'aborder des cours plus formels en master. On s'autorisera à donner certains résultats sans démonstration. Le temps imparti ne permet pas une présentation en profondeur de ces deux sujets, et on préférera la clarté à la quantité.

Sur la partie intégration, on insistera sur l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, et de la convergence dominée plutôt que sur la présentation complète de la théorie.

Sur la partie calcul différentiel, on ne présentera pas les démonstrations les plus longues, pour privilégier le développement d'exemples.

7.5 Topologie

(24h de cours en amphi, 36h de TD)

Programme

- Espaces métriques, espaces vectoriels normés, ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Normes équivalentes dans un espace vectoriel.
- Exemples classiques d'espaces vectoriels normés : $\mathbb{R}^n$, espaces de fonctions (espace des fonctions bornées sur un ensemble X, $(\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ avec I intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $(\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$), espaces de suites ($\ell^\infty$, ℓ^1, ℓ^2).
- Limite dans un espace métrique. Limite et adhérence. Limite d'une application.
- Applications continues. Caractérisation séquentielle. Caractérisation en termes d'image inverse d'ouverts et de fermés. Applications lipschitziennes (Cette partie doit être terminée lorsque l'on commencera le calcul différentiel dans l'UE "Intégration de Lebesgue et Calcul différentiel" qui a lieu en parallèle).
- Compacité. Définition (Borel-Lebesgue). Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass. Propriétés des compacts.
- Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Norme d'une application linéaire continue. Compacité de la boule unité en dimension finie. Équivalence des normes en dimension finie.
- Espaces complets. Suites de Cauchy. Exemple de $\mathbb{R}$. Exemple des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. Fermés et complets ; compacts et complets. Espaces de Banach. Théorème du point fixe des applications contractantes et applications.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Il est nécessaire de connaître toutes les définitions et les énoncés du cours, et de savoir les illustrer par des exemples. En outre, voici une liste non exhaustive d'énoncés qu'il faudra savoir démontrer ou de notions qu'il faudra maîtriser. Cette liste sera précisée par l'enseignant du cours :

- Maîtriser les opérations booléennes sur les ensembles (union, intersection, complémentaire) et leur comportement par image directe et par image réciproque par une application.
- Sur $\mathbb{R}^2$ les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ sont des normes, et elles sont équivalentes.
- Dans l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont bien des normes. Savoir les comparer.
- Propriétés élémentaires des ouverts (stabilité par union, intersection finie) et fermés dans un espace métrique ; caractérisation séquentielle des fermés.
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Une fonction est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. un fermé).
- Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés.
- Deux normes équivalentes définissent les mêmes fonctions continues.
- La distance est une application lipschitzienne donc continue.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
- L'image continue d'un compact est compacte.
- Un compact est fermé-borné.
- Un fermé dans un compact est compact.
- Une partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète
- Une suite de Cauchy qui a une sous-suite convergente est convergente.

Compétences

- Maîtrise des concepts fondamentaux de la topologie générale, tels que les espaces métriques, les espaces vectoriels normés, les ouverts, les fermés, l'intérieur, l'adhérence, les normes équivalentes, les limites, les applications continues, la compacité, les espaces complets, etc.

— Capacité à démontrer les propriétés et théorèmes de base en topologie, ainsi qu'à les appliquer dans des contextes variés.
— Compétence dans la manipulation des espaces vectoriels normés, notamment la compréhension des exemples classiques, tels que $\mathbb{R}^n$, les espaces de fonctions, les espaces de suites, etc.
— Aptitude à caractériser et à étudier les propriétés des applications continues, des espaces compacts et des espaces complets.
— Maîtrise des techniques de démonstration en topologie, notamment la caractérisation séquentielle, les arguments de compacité, les preuves par l'absurde, etc.
— Capacité à comparer et à utiliser différentes normes sur un même espace, ainsi qu'à comprendre les implications des équivalences entre normes.

8 UE spécifique au CTES

8.1 Algèbre commutative

(12h de cours, 18h de TD)

Programme

- Définition d'un anneau, sous-anneau ; exemples
- Inversibilité, diviseur de zéro ; anneau intègre, corps.
- Morphisme d'anneaux.
- Idéal (à partir de maintenant on se restreint aux cas des anneaux commutatifs unitaires) ; idéal engendré par une partie.
- Relation d'équivalence en général ; espace quotient. Exemples
- Relation d'équivalence induite par un idéal ; anneau quotient, exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Propriété universelle du quotient.
- Cas des anneaux de polynômes : anneau des polynômes sur un anneau commutatif unitaire A ; division euclidienne par un polynôme unitaire ; anneau $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$; Exemples de quotient d'anneaux de polynômes en une variable, et utilisation de la division euclidienne pour se représenter un quotient $\mathbb{K}[X]/I$ où I est principal.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours Au delà des connaissances sur les anneaux présentées dans le cours, la notion de d'espace quotient est importante. Le cas des quotient d'anneaux est essentiel à comprendre.

Compétences Les étudiants doivent être capables de vérifier qu'un ensemble est un anneau, un sous-anneau ou un idéal, ou vérifier qu'une application est un morphisme d'anneaux (en particulier sur des exemples provenant de l'analyse ou de l'algèbre linéaire). Comme d'autres cours, cette UE est l'occasion de vérifier que les étudiants maîtrisent la manipulation des quantificateur et des opérations sur les ensembles.

Il faut savoir utiliser la propriété universelle du quotient pour montrer que deux anneaux sont isomorphes dans des cas relativement simples. Il faut savoir travailler dans des quotients de la forme $\mathbb{K}[X]/(P)$ où P est unitaire : il faut être capable d'en donner une base comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'écrire la matrice de l'application linéaire qui à l'image d'un polynôme Q associe le polynôme $X^d Q$ pour un $d \in \mathbb{N}^*$ fixé.

9 UE spécifiques à la double licence Maths-Info

9.1 Probabilités 1

(12h de cours, 18h de TD)

Programme

1. Quelques rappels sur les ensembles.
   — Union, intersection d'ensembles et propriété de distributivité. Complémentaire d'un ensemble.
   — Injections, surjections, bijections. Image réciproque d'un ensemble par une application.
   — Ensembles finis et infinis, dénombrabilité d'un ensemble infini.
   — Parties d'un ensemble. Quelques résultats combinatoires (permutation, arrangement, combinaison). Formule du binôme de Newton.
2. Espace probabilisé `discret`.
   — Univers Ω, événements, mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
   — Propriétés élémentaires des mesures de probabilité, continuité croissante des mesures. Formule du crible.
   — Premières modélisations : lancer d'une ou plusieurs pièces, de dés, etc.
3. Probabilités conditionnelles.
   — Définition de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$.
   — Formule des probabilités composées.
   — Formule de Bayes pour deux événements.
   — Systèmes complets d'événements, formule des probabilités totales. Arbre de probabilité.
   — Indépendance de deux événements, d'une famille d'événements.
4. Variables aléatoires discrètes.
   — Définition. Evénement $[X \in A]$, lorsque A est un ensemble discret.
   — Loi d'une v.a. discrète. Exemple de deux v.a. différentes ayant la même loi.
   — Quelques lois usuelles : uniforme, Bernoulli (indicatrice d'un événement), binomiale, de Poisson, géométrique.
   — Espérance d'une v.a. discrète : définition, exemples, propriétés.
   — Théorème de transfert.
   — Variance d'une v.a. : définition, exemples, propriétés.
   — Fonction de répartition : définition, exemples. Propriétés, caractérisation de la loi.
   — Indépendance de deux v.a. discrètes, d'une famille de v.a. discrètes.
   — Somme de v.a. indépendantes. Exemple des binomiales.
   — Fonction génératrice d'une v.a. à valeurs entières : exemples et applications.
5. Couples de v.a. discrètes.
   — Définition.
   — Loi conjointe. Lois marginales, lois conditionnelles.
   — Covariance de deux v.a. Variance d'une somme de v.a.
   — Covariance de deux v.a. indépendantes. Exemple de v.a. dépendantes et non corrélées.
   — Application à la régression linéaire.

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Un accent particulier est mis sur le fait de bien connaître les hypothèses de chaque théorème, en particulier pour la loi des grands nombres et le théorème central limite.

Les démonstrations sont toutes à comprendre. Il faut savoir les restituer sauf mention explicite du contraire.

Compétences

Le but du cours est de familiariser les étudiants au langage rigoureux de la théorie des probabilités, en considérant uniquement le cas discret. À la fin de ce cours, il s'agit avant toute chose de se sentir suffisamment à l'aise dans ce nouveau cadre pour répondre à des problèmes concrets faisant intervenir de l'aléatoire. Cette compétence au sens large peut se décliner en trois sous-compétences :

Modélisation probabiliste Le traitement mathématique d'un problème avec une part d'aléatoire doit en premier lieu être décrit dans le langage de la théorie des probabilités. Cette première étape de l'étude d'un problème tient plus de la modélisation que des mathématiques et ne pourra pas constituer une part importante de l'évaluation. Néanmoins, il est important de comprendre plusieurs choses à ce sujet : savoir où s'arrête la modélisation et où commence le traitement mathématique du problème, savoir interpréter certains choix faits dans la modélisation (par exemple l'indépendance de variables aléatoires ou le choix d'une certaine loi de probabilité), et savoir interpréter le résultat d'un calcul en revenant au problème de départ. Il convient également de faire la distinction, particulièrement subtile en probabilités, entre le raisonnement intuitif, qui permet souvent d'avoir une idée de la solution à un problème, et le raisonnement rigoureux, qui permet d'arriver à la solution avec certitude.

Raisonnement probabiliste La théorie des probabilités discrètes, bien que très proche des théories des séries, possède ses particularités, notamment par ses notations qui sont souvent déroutantes au début, et par certains raisonnements qu'on ne retrouve pas dans les autres matières. Certains points délicats doivent être acquis pour l'examen : utilisation de l'indépendance ou de la disjonction d'événements, distinction entre indépendance et non-corrélation. Ces points précis demandent un travail de relecture du cours qui va au-delà de la compréhension intuitive des probabilités.

Aspects calculatoires Les exercices de probabilités sont assez souvent calculatoires et font appels à des outils introduits dans les UE d'analyse. Il faut savoir montrer qu'une suite de réels décrit une loi de probabilité, puis savoir calculer des espérances par rapport à cette loi avec le théorème de transfert. Ces calculs nécessitent une certaine aisance dans la manipulation des séries à termes positifs.

9.2 Probabilités 2

(12h de cours, 18h de TD)

Programme

1. Quelques rappels sur la théorie des probabilités discrètes.
   — Univers et mesure de probabilité. Propriétés des mesures de probabilité.
   — Variable aléatoire discrète. Espérance, variance. Indépendance.
   — Fonction génératrice.
2. Variables aléatoires continues.
   — Espace probabilisé : Univers Ω, tribu des évènements $\mathscr{F}$ sur Ω, mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
   — Définition d'une v.a. continue par mesurabilité (on n'insiste pas trop sur la notion de Borélien, mais on peut faire le parallèle avec l'UE Topologie).
   — Événement $[X \in A]$, lorsque A est une partie borélienne de $\mathbb{R}$.
   — Définition d'une loi, d'une loi à densité. Quelques lois à densité usuelles : uniforme, exponentielle, Gamma (avec paramètre entier), de Cauchy, normale.
   — Espérance d'une loi à densité. Linéarité de l'espérance et Théorème de transfert (admis).
   — Variance et fonction de répartition d'une loi à densité. Quelques calculs pour les lois usuelles.
3. Convergence de suites de v.a.
   — Notions de convergence presque-sûre et en probabilité, lien entre ces deux modes de convergence (preuve admise).
   — Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
   — Loi faible des grands nombres.
   — Loi forte des grands nombres (admis).
   — Définition de la convergence en loi. Caractérisation avec les fonctions de répartition.
   — Énoncé du théorème central limite. Quelques applications.
4. Vecteurs aléatoires
   — Définition d'un vecteur aléatoire. Vecteur moyenne, matrice de covariance.
   — La matrice de covariance est symétrique définie semi-positive. Comportement d'un vecteur aléatoire par action d'une application linéaire.
   — Vecteurs aléatoires gaussiens. Propriétés. Théorème de Cochran.
   — Théorème central limite vectoriel (admis).

Objectifs et attendus

Connaissances du cours

Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Un accent particulier est mis sur le fait de bien connaître les hypothèses de chaque théorème.

Les démonstrations sont toutes à comprendre.

Compétences

Le but du cours est de définir un cadre rigoureux dans lequel on peut construire une théorie des probabilités. À la fin de ce cours, il s'agit avant toute chose de se sentir suffisamment à l'aise dans ce nouveau cadre pour répondre à des problèmes concrets faisant intervenir de l'aléatoire. Cette compétence au sens large peut se décliner en trois sous-compétences :