

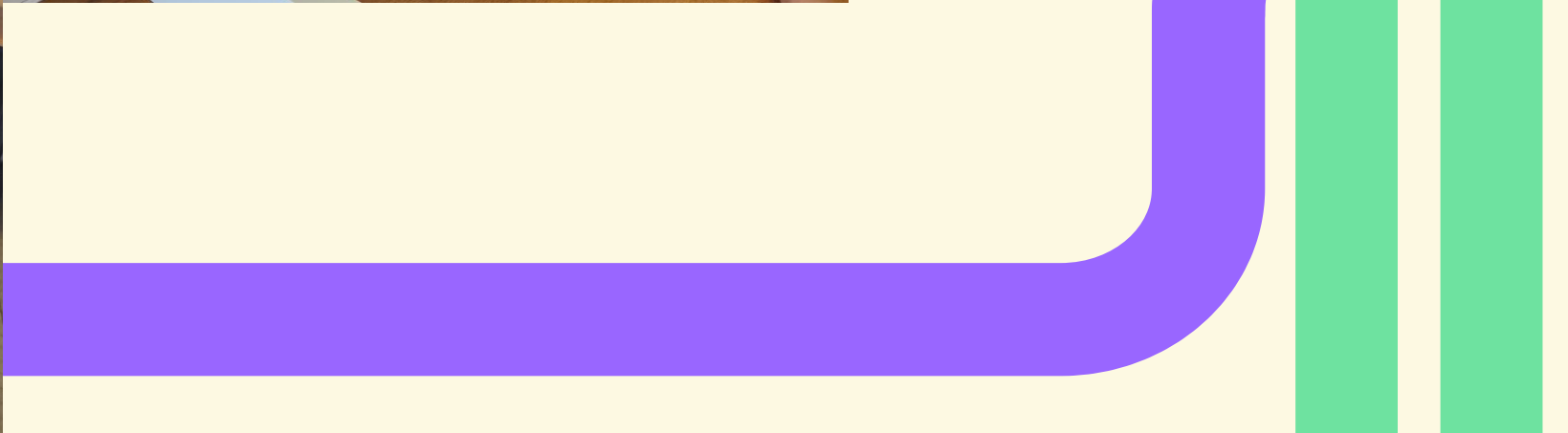
Dates des stages :
15 au 19 juin et 22
au 26 juin 2026

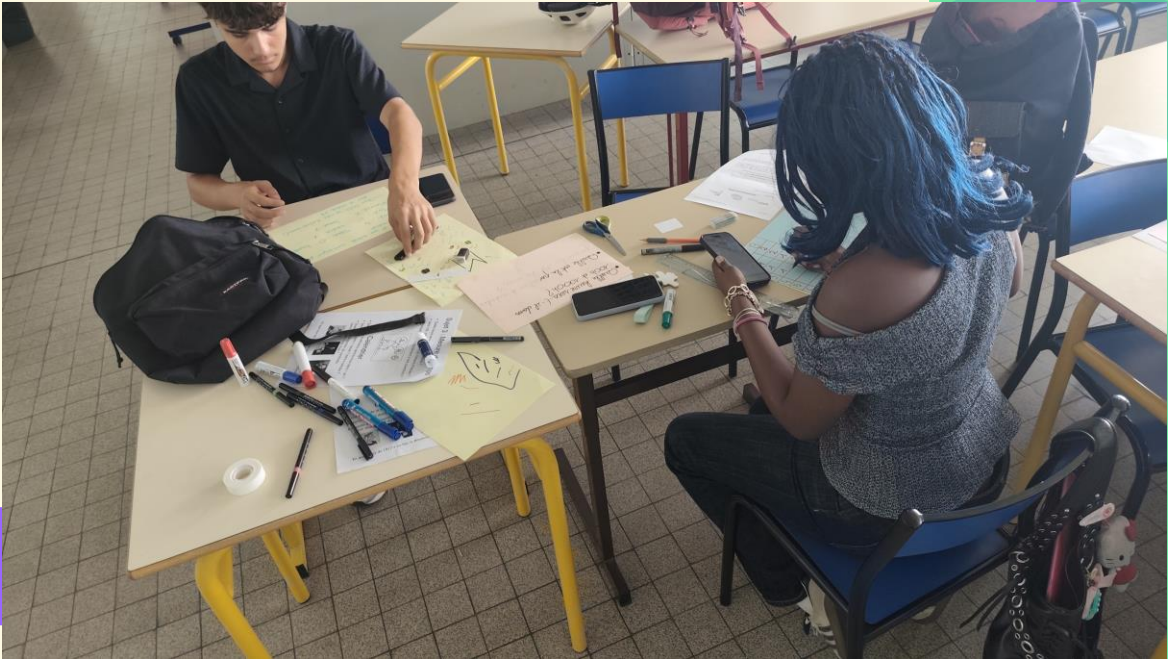
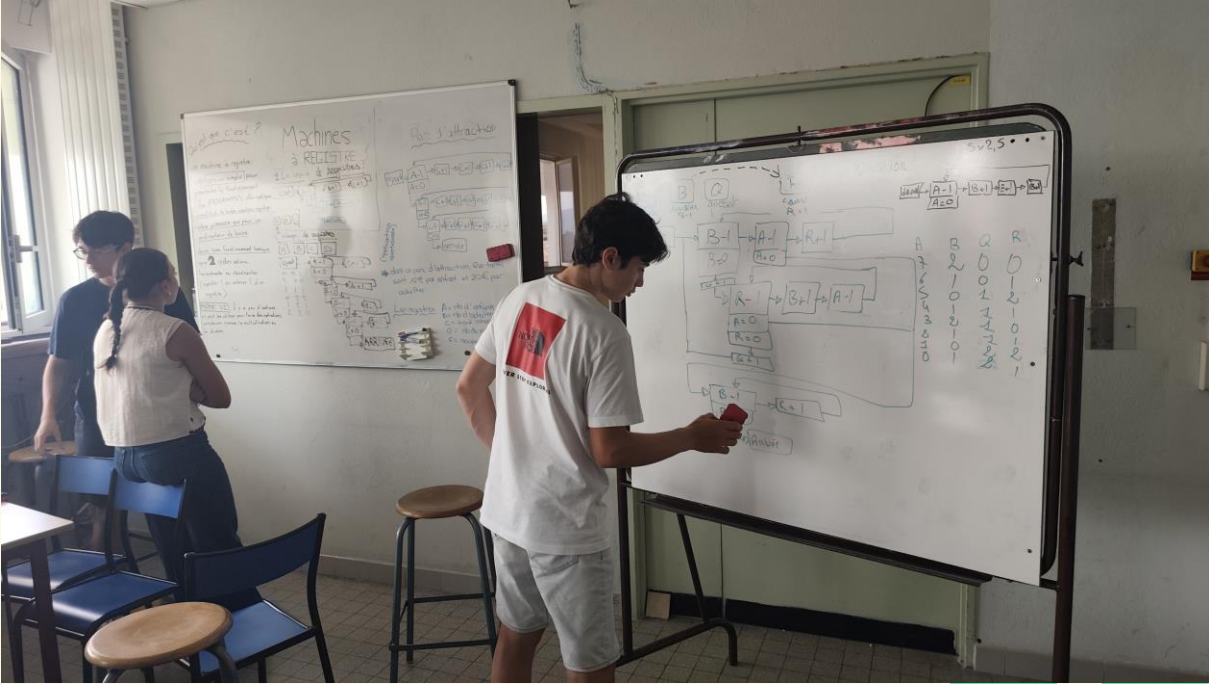
Les élèves : 51 élèves de seconde
(24 filles et 27 garçons venant de
toute l'académie) dont 10 internes au
lycée Jean-Perrin par semaine

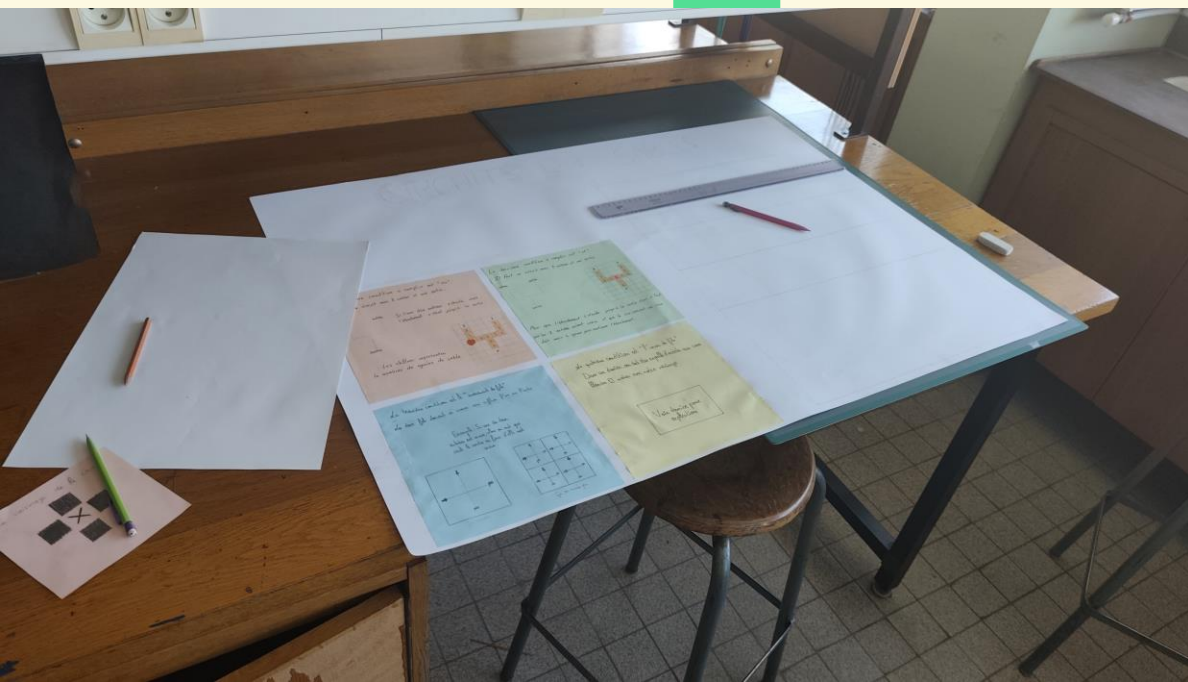
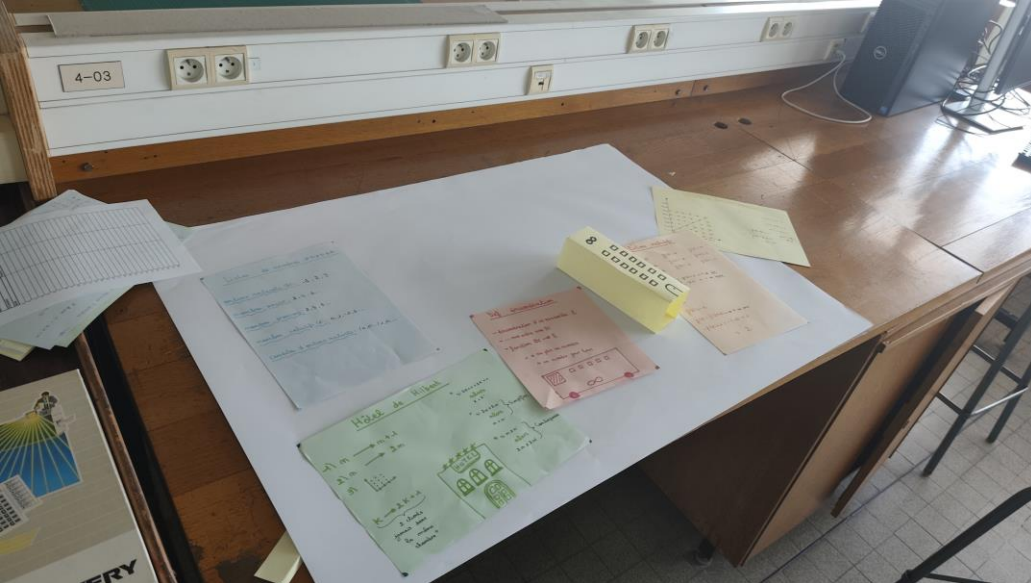


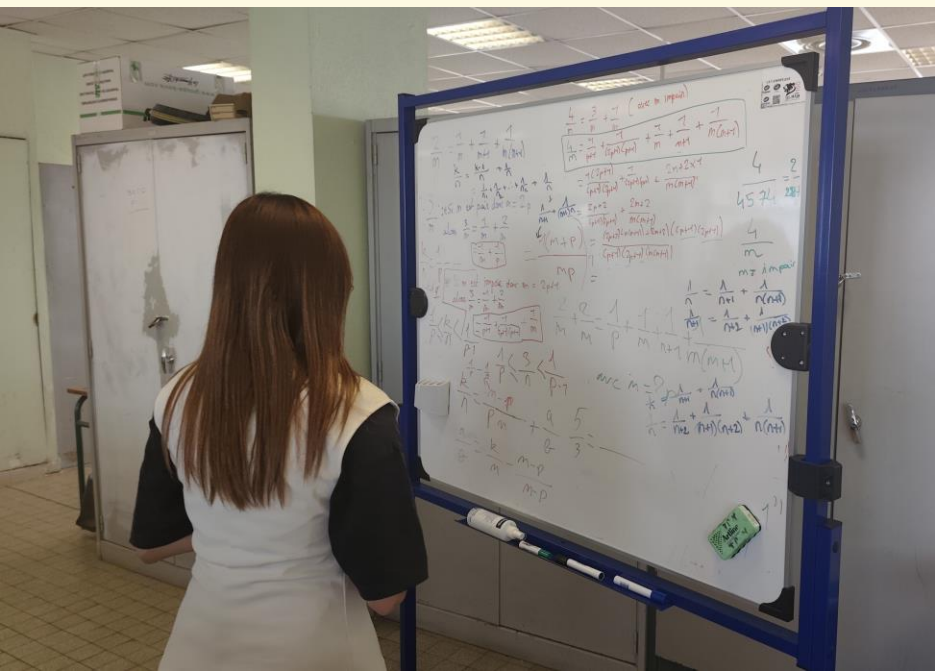
Stage de seconde MathC2+

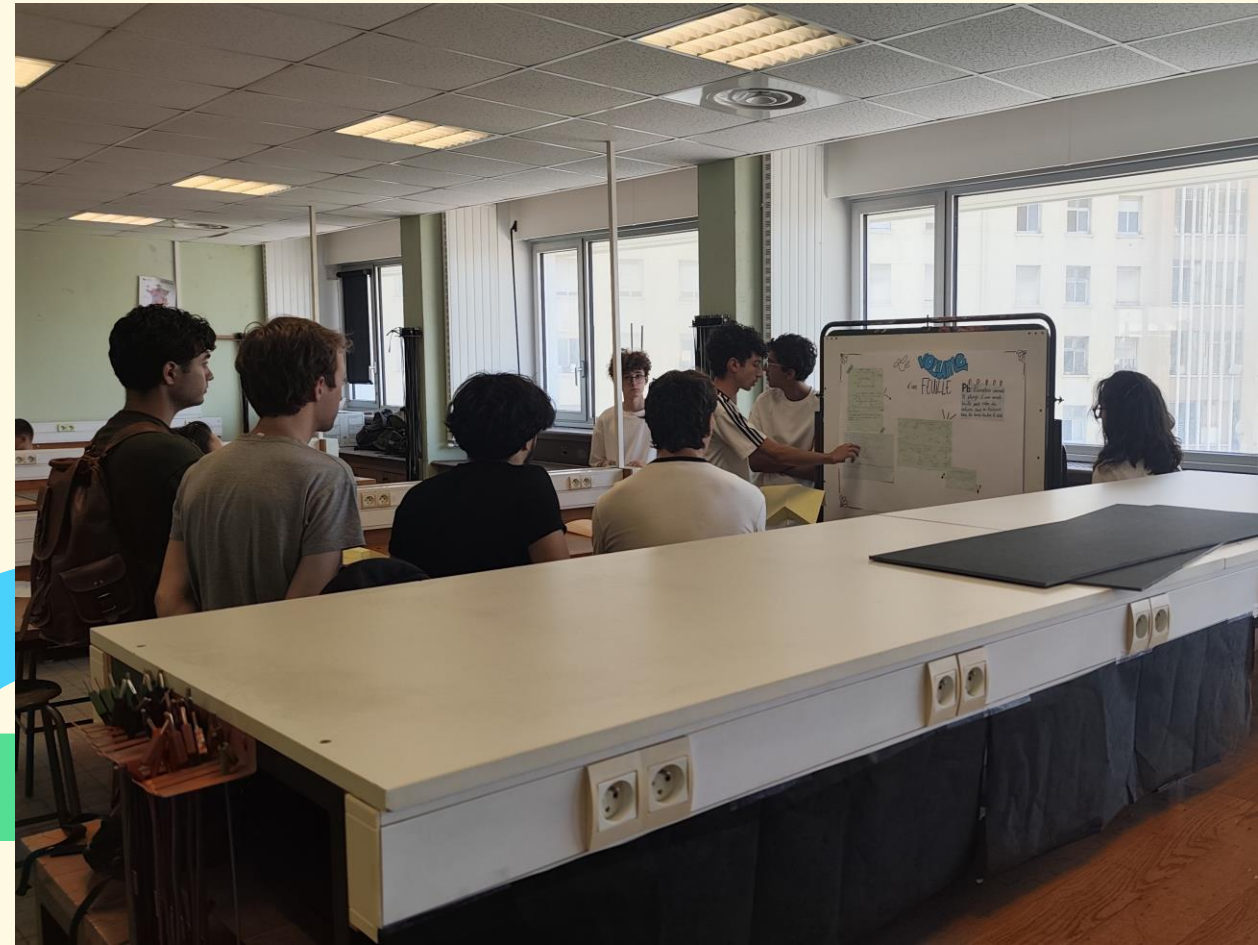


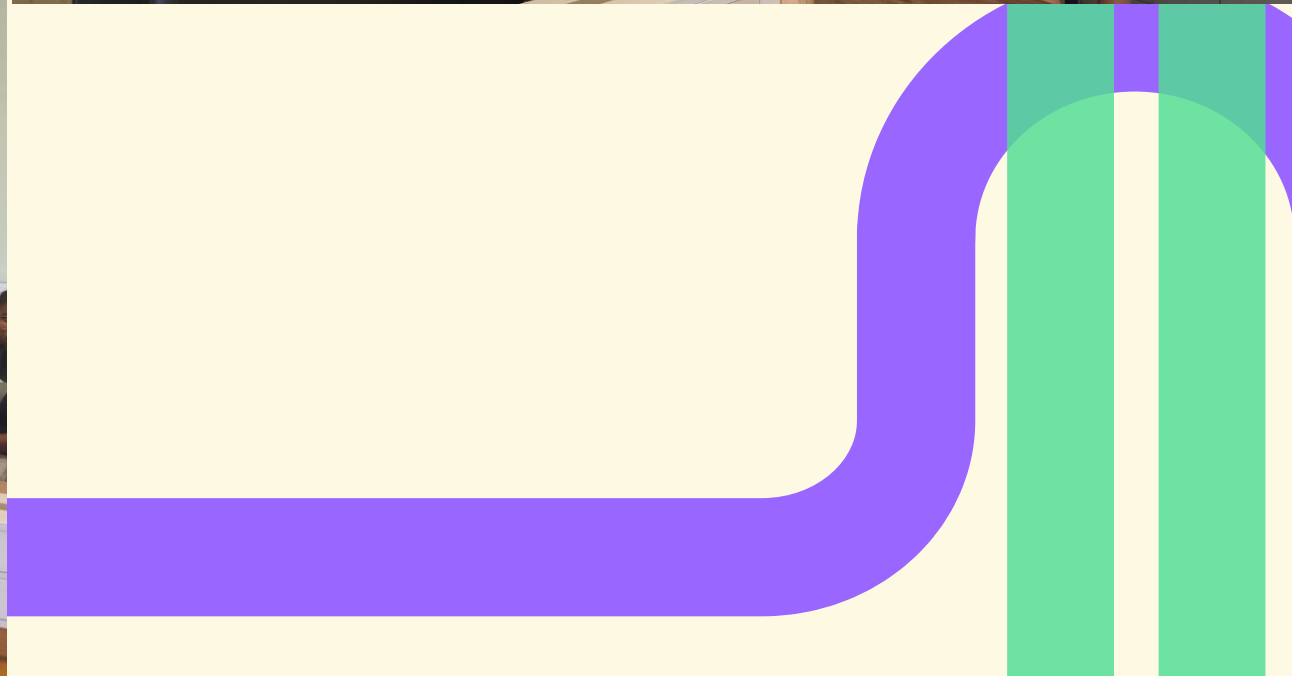




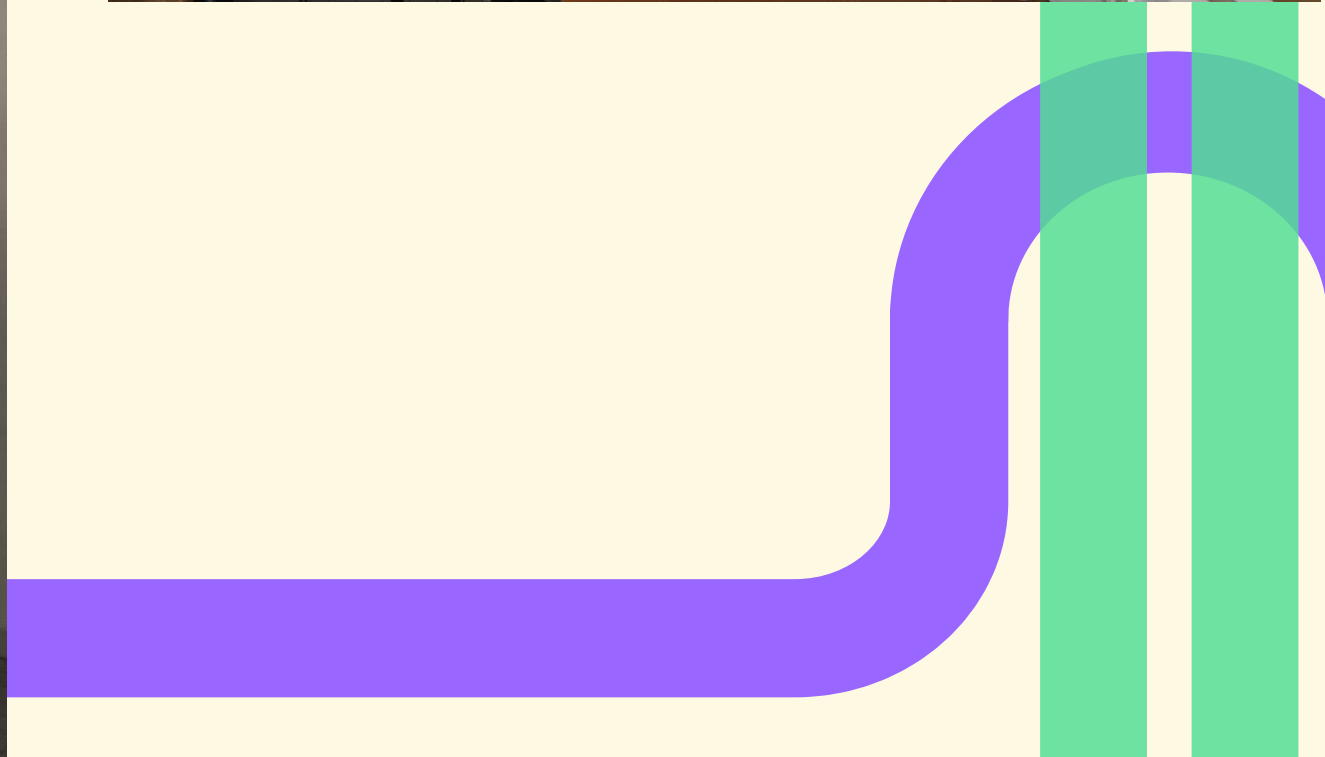




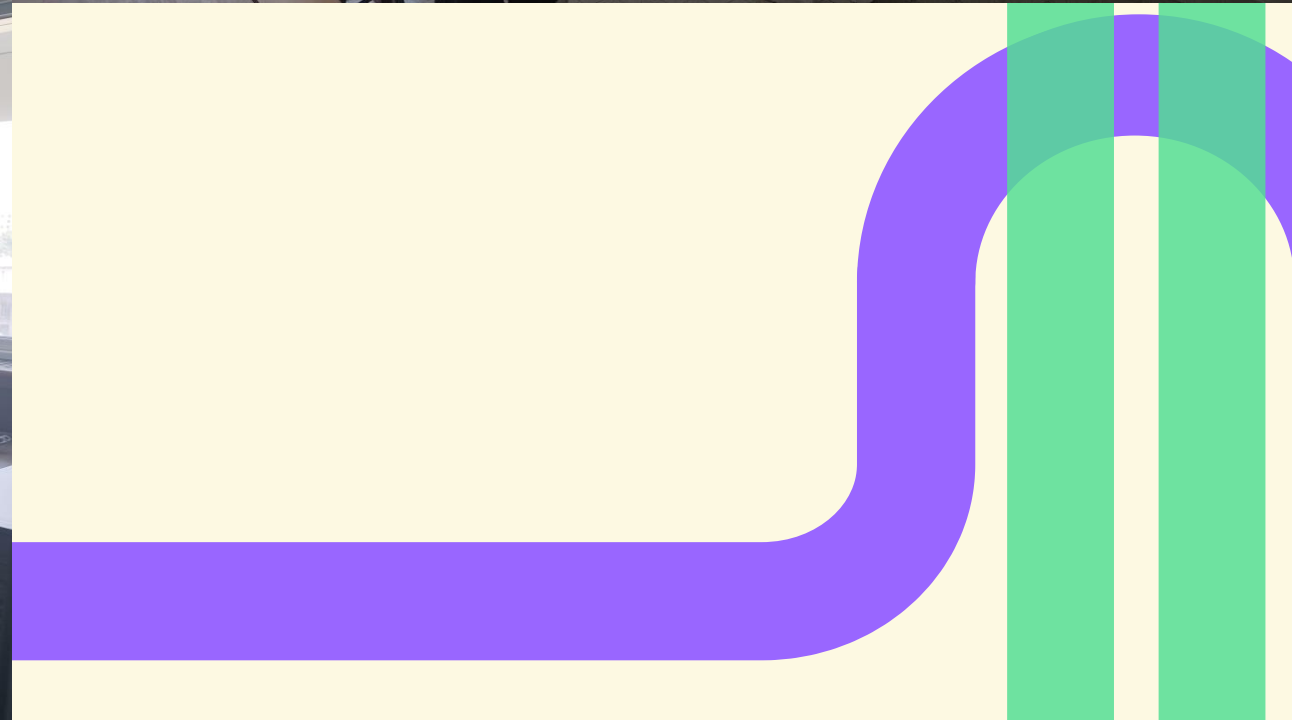
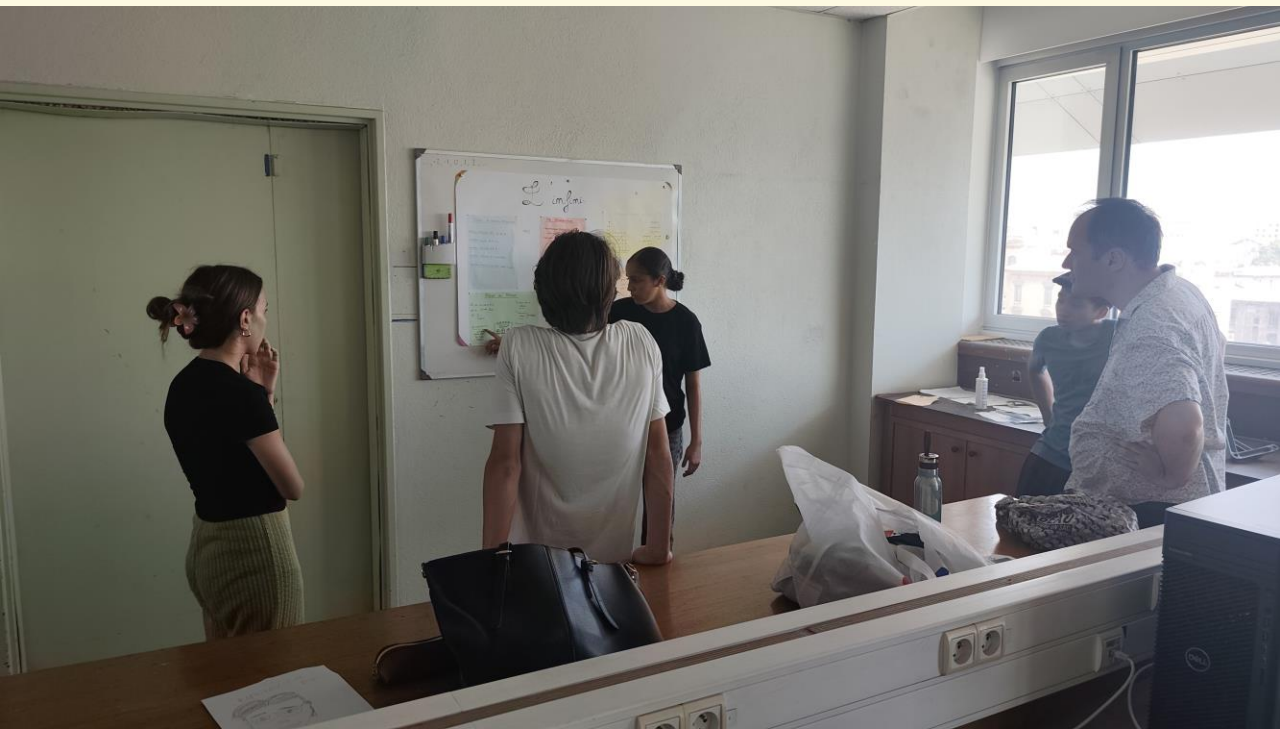




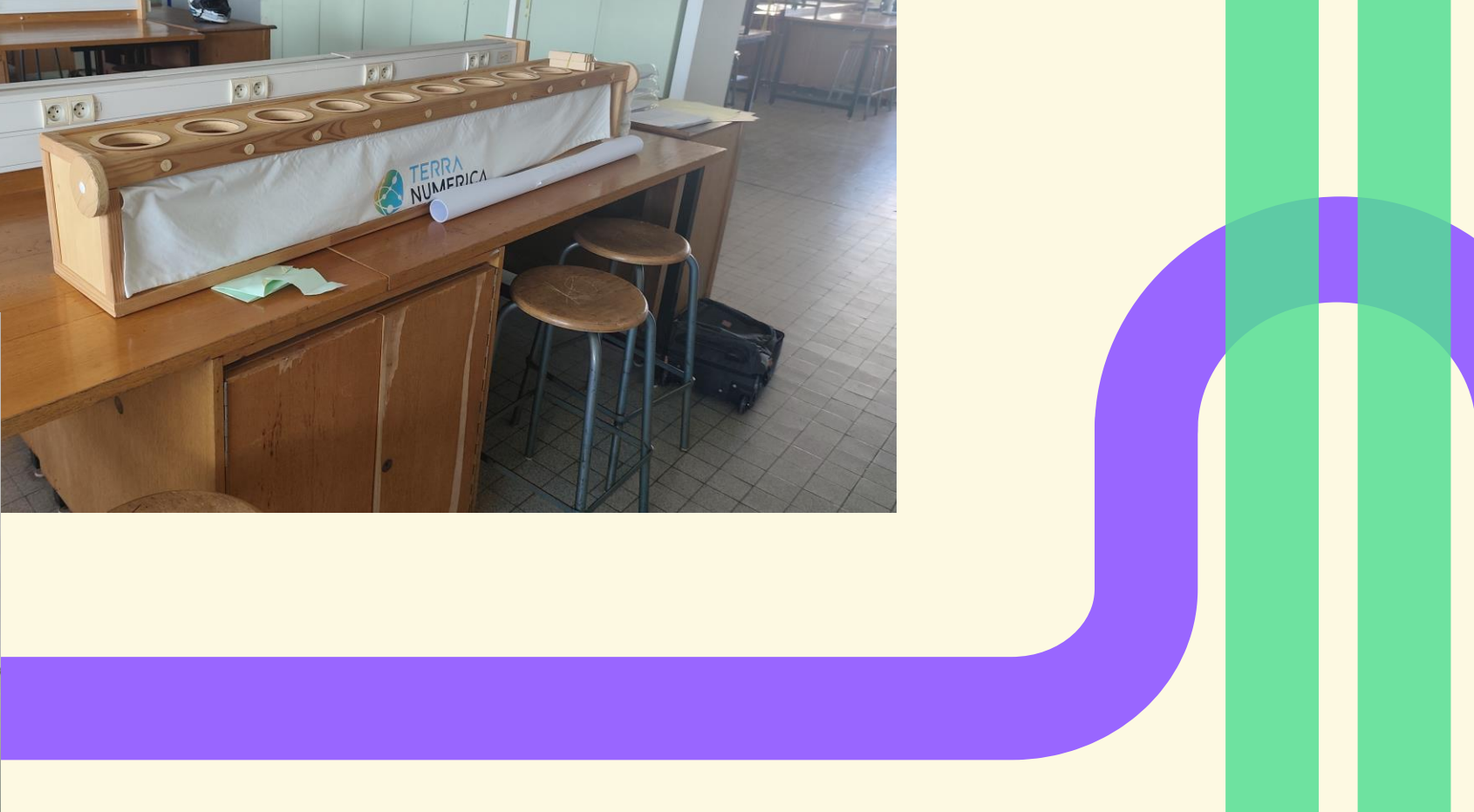


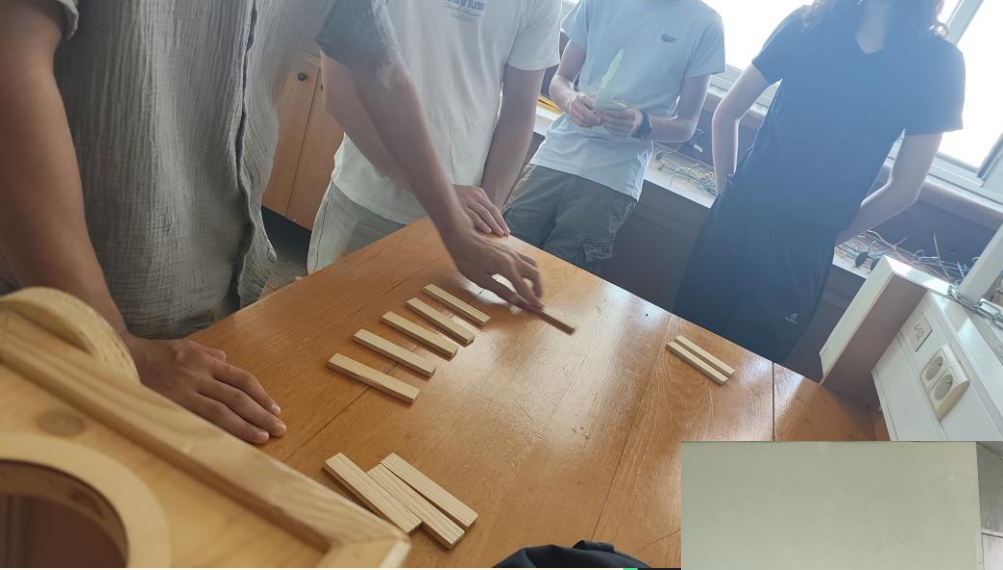


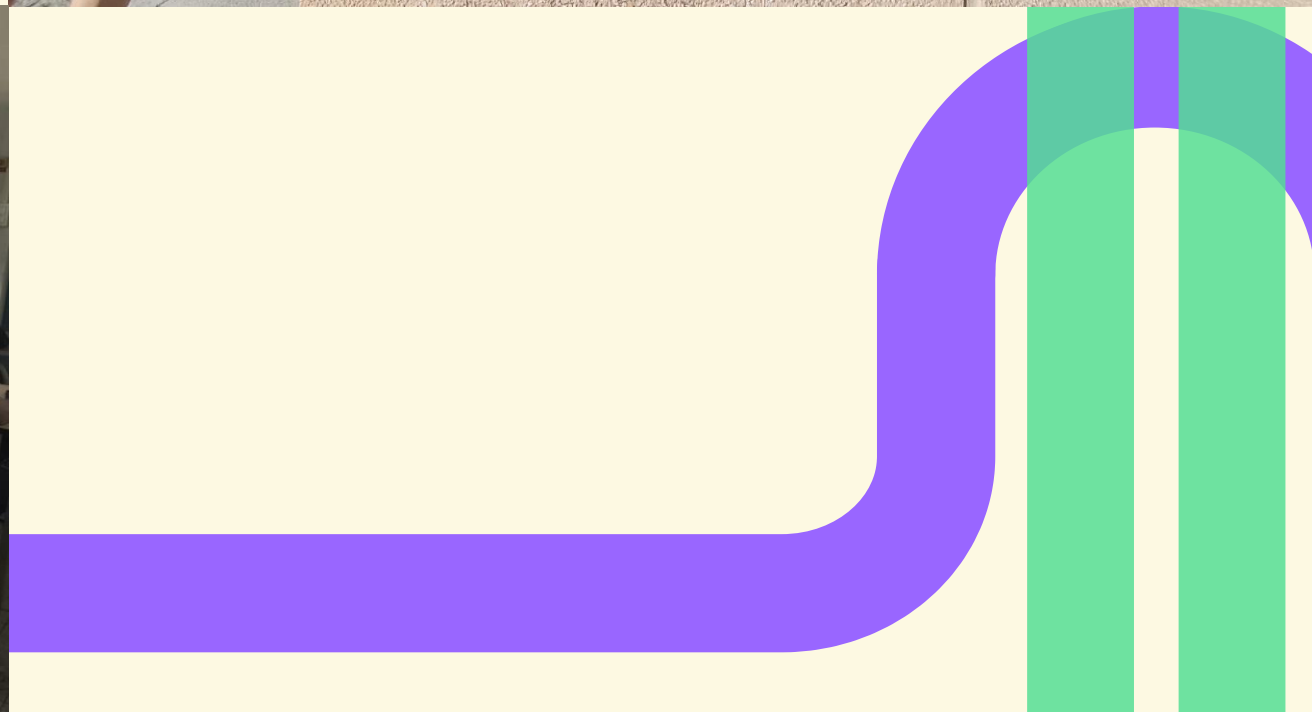


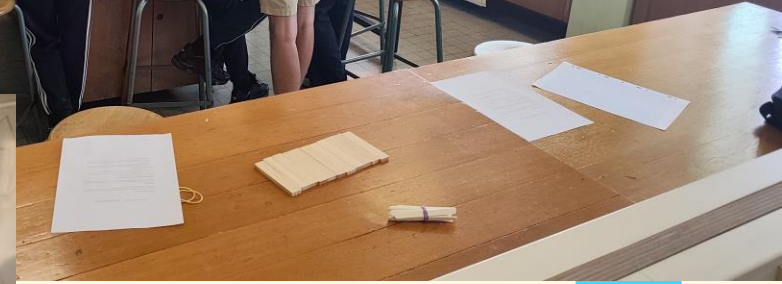


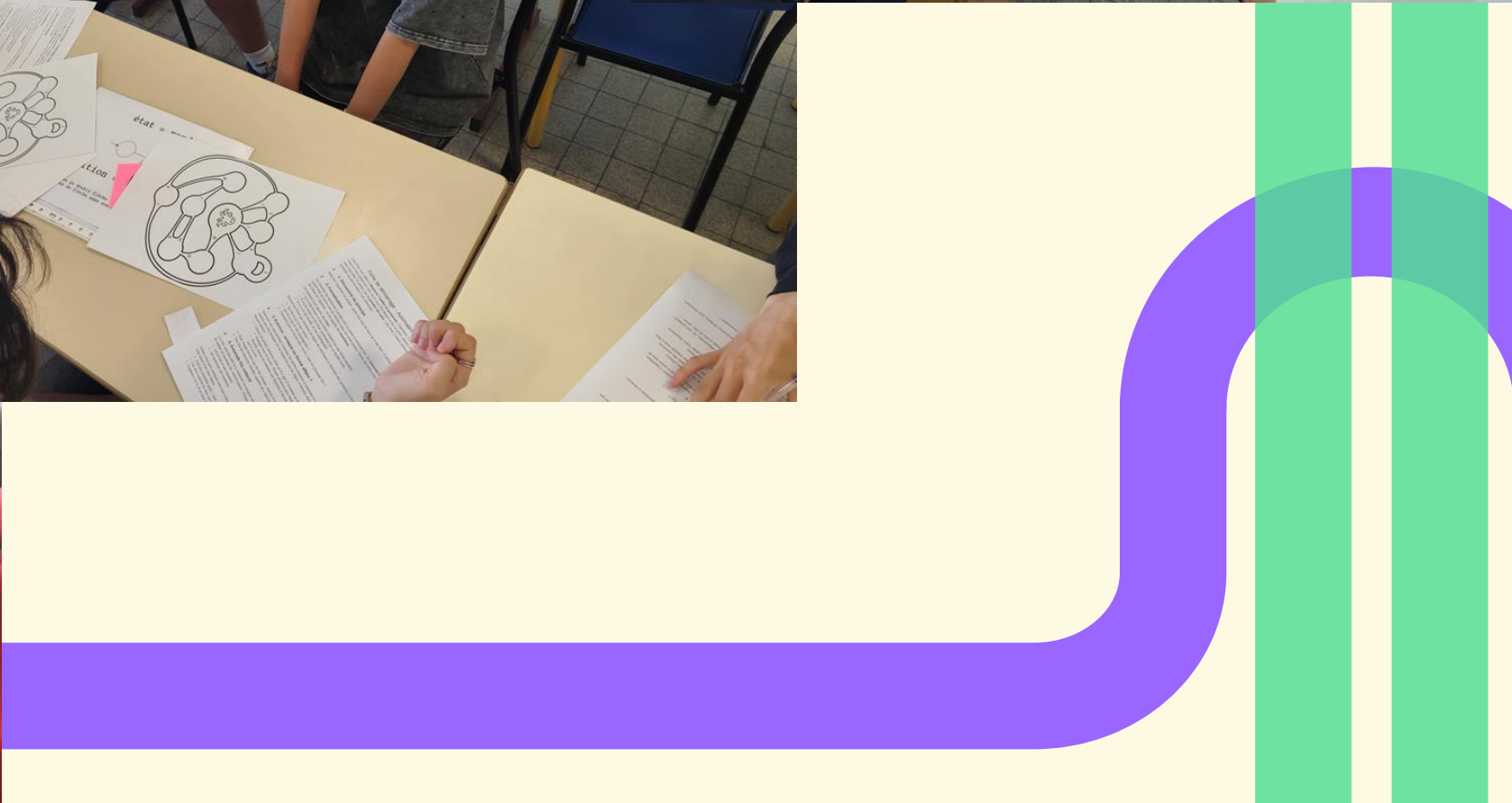
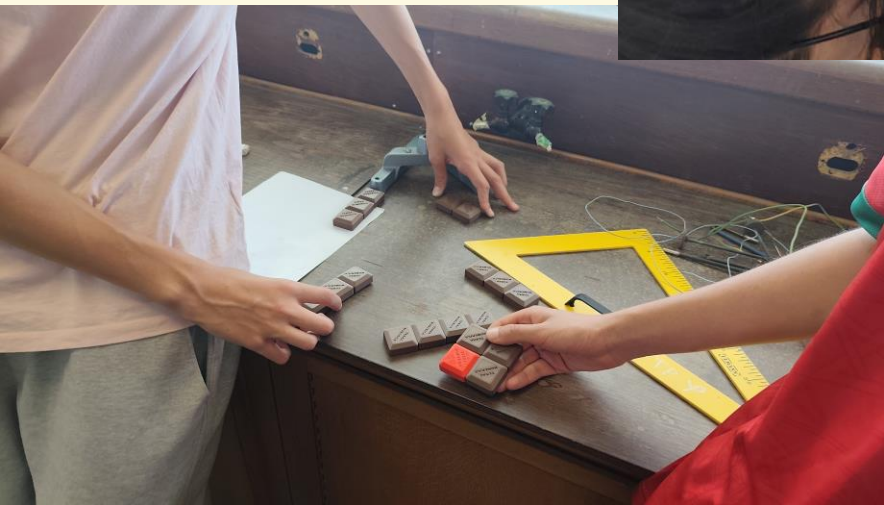
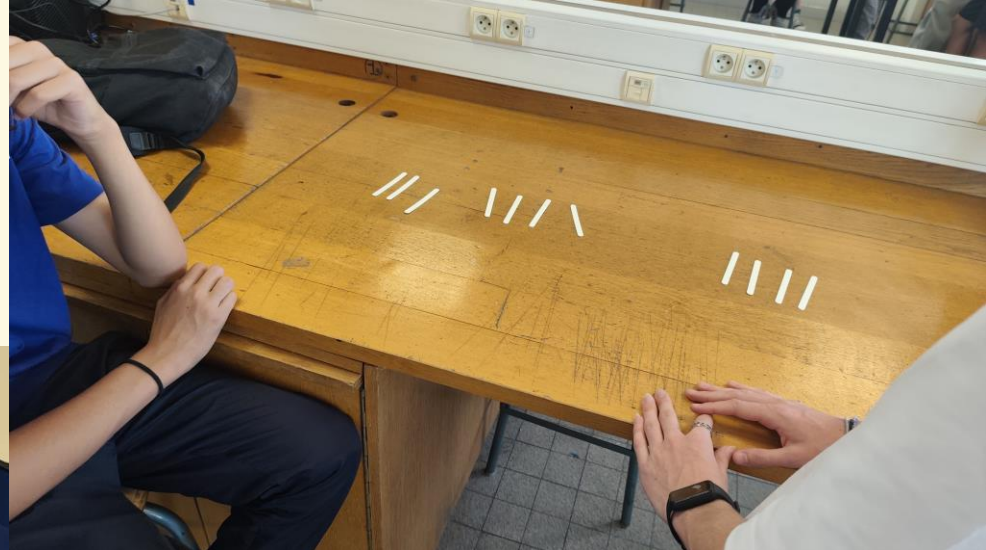
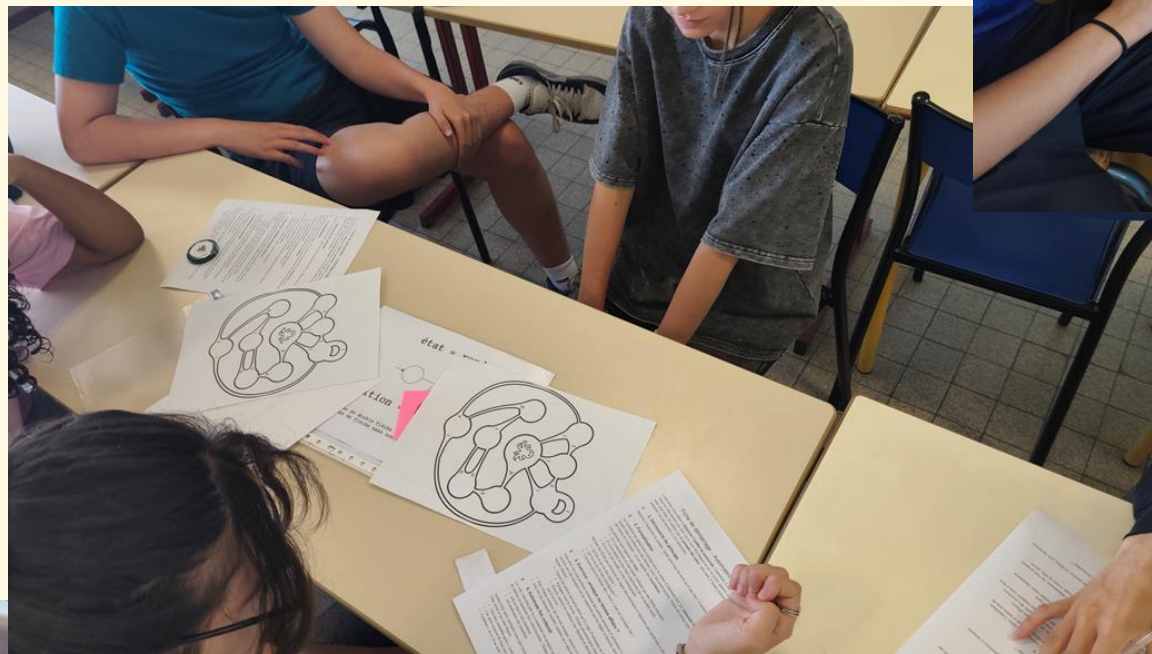












Titre: Ascenseurs

problème:
On considère un immeuble possédant une infinité d'étage numérotés par les entiers naturels. 2 ascenseurs se déplacent selon la règle suivante:
• $\frac{x}{2}$ = pair
• $2x + c$ = impair
x est l'étage courant. c est un entier fixe.
Détectif:
- suite à un c fixé peut-on arriver à l'étage n°1?

Le Code:

```

xc = int(input("donne un nombre x > 0"))
c = 1
for i in range(1):
    if x == 1:
        break
    if x % 2 == 0:
        x // 2
    else:
        x = 2 * x + c
print(xc)

```

expériences

Conclusion
 lorsque $c = 1; 3; 4; 5; 7; 9$
 tous les puissances de 2
 renvoie à 1.
 lorsque $c = 2$
 tous les nombres pairs renvoie à 1.
 lorsque $c = 6$
 tous nombres n'étant pas multiples de 3 renvoie à 1.

Bâtiment

étage 8
étage 7
étage 6
étage 5
étage 4
étage 3
étage 2
étage 1

Conclusion
 $C = \text{impair}$ $x = \text{pair}$
 1) $N = 2^n$ premières $\rightarrow 2^n$ est cassé jusqu'à impair.
 Ainsi nous pouvons remarquer que cela ne donne jamais 1.
 Exemple: nous avons $c = 3$ et $x = 30$.
 En suivant la règle de la parité, nous obtenons: $30 + 2 = 32$, donc 32 est impair.
 dans ce cas va augmenter sans arrêt.

Conclusion
 lorsque $c = 2$ il est possible de retomber aux 1 avec n'importe quel x .
 lorsque $c = 6$ et $x = 3$
 $\Rightarrow 2x + c = 12$
 $\Rightarrow \frac{12}{2} = 6$
 $\Rightarrow \frac{6}{2} = 3$
 à l'infini ∞
Conclusion: renvoie toujours au x d'origine, cela crée une boucle seulement lorsque $c = 6$ et $x = \text{multiple de 3}$. En revanche, lorsque $c = 6$ et $x \neq \text{multiple de 3}$, on arrive systématiquement à 1.





M. Chebana
H. Milési
A. TERRAS
A. FELLOUCH
A. DAOUDI

SOMME DES DECIMALES

Sujet 2

A partir d'un nombre entier positif naturel noté sous forme décimale, on forme le nombre obtenu : en ajoutant les chiffres, en multipliant les chiffres et en ajoutant les carrés des chiffres. On répète cette procédure.

Qu'observe-t-on sur le long terme?

Somme des chiffres :

Supposons que N soit un entier naturel positif composé de 3 chiffres $N \rightarrow a, b, c$ $S \rightarrow a + b + c$ tel que : $1 \leq a \leq 9$ $0 \leq b \leq 9$ $0 \leq c \leq 9$	<u>Exemples :</u> $547 \rightarrow 5+4+7 \rightarrow 16 \rightarrow 7$ $130 \rightarrow 1+3+0 \rightarrow 4$ $255 \rightarrow 2+5+5 \rightarrow 12 \rightarrow 3$
---	--

Conclusions	Démonstration
Le résultat final a toujours un seul chiffre compris entre 1 et 9.	$N = A \times 100 + B \times 10 + C$ $S = A + B + C$ Si $S - N < 0$, alors $S < N$ $S - N =$
Le nombre est toujours $\geq$ à sa somme.	$A + B + C - (100A + 10B + C)$ $= A + B + C - 100A - 10B - C$ $= -99A - 9B$
On peut utiliser la division euclidienne pour trouver la somme finale.	$= -(99A + 9B)$ $S - N < 0$ donc $S < N$

Produit des chiffres :

Supposons que N est un entier naturel positif composé de 3 chiffres $N \rightarrow a, b, c$ $P \rightarrow a \times b \times c$ tel que : $1 \leq a \leq 9$ $0 \leq b \leq 9$ $0 \leq c \leq 9$	<u>Exemple :</u> $547 \rightarrow 5 \times 4 \times 7 = 140 \rightarrow 1 \times 4 \times 0 = 0$ $130 \rightarrow 1 \times 3 \times 0 = 0$ $255 \rightarrow 2 \times 5 \times 5 = 50 \rightarrow 5 \times 0 = 0$ $236 \rightarrow 2 \times 3 \times 6 = 36 \rightarrow 3 \times 6 = 18 \rightarrow 8$
--	---

Conclusions	Démonstrations
Le résultat final a toujours un seul chiffre compris entre 0 et 9.	$N = 100a + 10b + c$ $P = a \times b \times c$ Si $P - N \leq 0$ alors $P \leq N$ $P - N = a \times b \times c - (100a + 10b + c)$ $= abc(1 - \frac{100}{a} - \frac{10}{b} - \frac{1}{c})$ $= abc(1 - \frac{100}{a} - \frac{10}{b} - \frac{1}{c})$ $= abc(1 - 1.23 - 0.17 - 0.11)$ $= abc \times (-0.362) = P - N$ $P - N \leq 0$ donc $P \leq N$
Le nombre est toujours $\geq$ à son produit.	

Somme des carrés des chiffres :

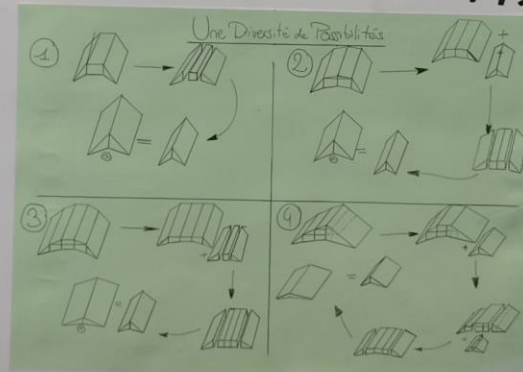
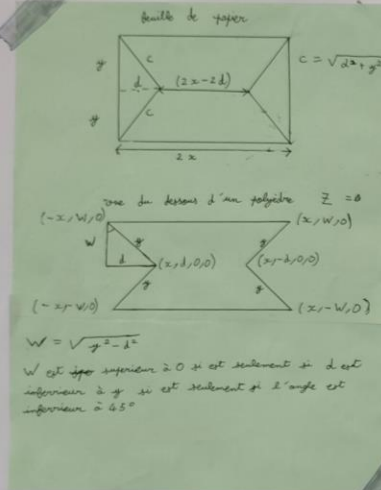
Soit N un entier naturel positif composé de 3 chiffres : a, b, c
tel que $\begin{cases} 1 \leq a \leq 9 \\ 0 \leq b \leq 9 \\ 0 \leq c \leq 9 \end{cases}$

$C = a^2 + b^2 + c^2$
 $\Rightarrow$ 2 résultats possibles :
- 1. noté C_1
- une boucle noté C_b

Ex : * $547 \Rightarrow 5^2 + 4^2 + 7^2 = 90$
 $\Rightarrow 9^2 + 0^2 = 81$
* $130 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 = 1$

Le VOLUME d'une FEUILLE

Pb: Démontrer comment
le pliage d'une simple
feuille peut créer du
volume tout en laissant
tous les bords toucher la table.



plus de plis = cercle



Première question posée :
Peut-on atteindre 2 ?
→ Oui, c'est possible
lorsqu'on ajoute les inverses :
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = 2$

Après avoir observé qu'on
pourrait atteindre 2, on essaye de
trouver des fractions qui ont $\frac{2}{3}$
pour numérateur : $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
et $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$. En observant

les éléments similaires on obtient :
 $\frac{1}{n} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1(m+1) + 1}{m(m+1)}$
 $= \frac{m+1+m+1}{m(m+1)}$
 $= \frac{2(m+1)}{m(m+1)}$
 $= \frac{2}{m}$

Donc n'importe quel nombre rationnel s'écrit
sous la forme $\frac{2}{m}$ peut être trouvé avec la
formule $\frac{2}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m+1)}$

Deuxième façon d'obtenir $\frac{2}{m}$ selon si m est pair ou
impair :

→ Si m est pair $m = 2p$: $\frac{2}{m} = \frac{2}{2p} = \frac{1}{p}$

→ Si m est impair : $m = 2p+1$

$\frac{2}{2p+1} = \frac{2}{2p+1}$

$\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{p+1} = \frac{1}{(2p+1)(p+1)} + \frac{1}{p+1} = \frac{1}{(2p+1)(p+1)} + \frac{2p+1}{(2p+1)(p+1)} = \frac{2p+2}{(2p+1)(p+1)} = \frac{2}{p+1}$

Donc si m est impair : ($m = 2p+1$)

$\frac{2}{m} = \frac{1}{(2p+1)(p+1)} + \frac{1}{p+1}$

SOMME D'INVERSES

ZHARI Karim
Guerris Wassim
Deligou Ibrahim
Zehouan Yanna

Emmène : en faisant une somme
d'inverses tous différents les uns
des autres et utilisable qu'une
seule fois peut-on obtenir
n'importe quel nombre ?

AVEC : $\frac{3}{n}$

On sait que :
 $\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$

→ Si $n = 2p+1$
(impair)

Alors $\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{2p+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(2p+1)(p+1)}$

→ Si $n = 2p$ (pair)

Alors $\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{2p}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$

Calcul de $\frac{4}{n}$:

Cas n°1 : Si n est paire, alors $\frac{4}{n} = \frac{2}{n}$ donc la formule a déjà
été évoquée

Cas n°2 : Si n est impaire, connaissant les formules de $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n}$

$\frac{4}{n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n}$

$\frac{4}{n} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(2p+1)(p+1)} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$
décomposition de $\frac{2}{n}$ décomposition de $\frac{1}{n}$

La formule est correcte car tous les dénominateurs sont différents

POUR TOUT ENTIER
 $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ $k, n \in \mathbb{N}$

On sait que $\frac{k}{n} = \frac{1}{p} + \dots$

tel que $\frac{1}{p} \leq \frac{k}{n} < \frac{1}{p-1}$

$\Leftrightarrow \frac{m}{n} < p < \frac{m}{n} + 1$ $\times k$

$\Leftrightarrow 0 \leq kp - n < k$

$\Leftrightarrow 0 \leq kp - n \leq k-1$

Soit $\frac{k}{n} - \frac{1}{p} = \frac{kp-n}{np}$

Donc : $\frac{k}{n} = \frac{1}{p} + \frac{kp-n}{np}$

En fonction du résultat trouvé à $\frac{kp-n}{np}$, le
calcul continuera jusqu'à obtenir un inverse.

LE COLORIAGE MAGIQUE

COMBIEN DE COULEURS MINIMUM FAUT-IL POUR COLORIER UN PLAN DE SORTE QUE CHAQUE POINT AIT UNE COULEUR DIFFÉRENTE D'UN POINT SE TROUVANT À UNE DISTANCE 1.

SOLUTION AVEC 9 COULEURS



LES ARRÊTES DE GAUCHE ET DU HAUT AINSI QUE LE SOMMET DU HAUT À GAUCHE SONT DE LA COULEUR DU CARRÉ

Solution à 8 couleurs



Légende: - cercle

- étoile

COMMENT COLORIER?

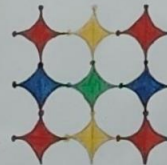
I-LES BORDURES:



Chaque quart de cercle est de la couleur de son étoile adjacente.



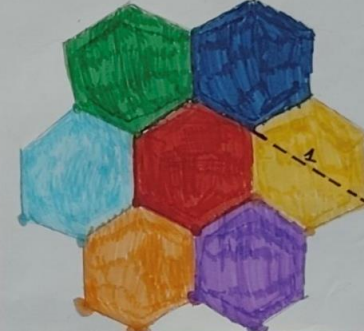
II-LES POINTS D'INTERSECTION:



Le sommet du haut et de gauche garde la couleur de son étoile.

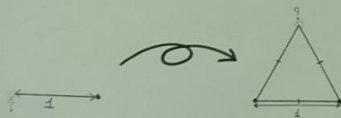


SOLUTION À 7 COULEURS

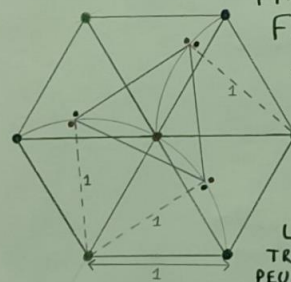


LES ARRÊTES DU BAS ET CELLE DE GAUCHE SONT DE LA COULEUR DE L'EXAGONE, DE MÊME QUE LES DEUX SOMMETS QUI RELIENT LES TROIS ARRÊTES

EN REPARTANT DU DEBUT, PREUVE QU'IL NOUS FAUT AU MOINS 3 COULEURS.



PREUVE QU'IL FAUT AU MOINS 4 COULEURS



LES SOMMETS DU TRIANGLE CENTRAL PEUVENT ÊTRE BLEUS OU ROUGES

GEFFARD Adrien, CSI Jacques Chirac, Marseille.
ROMEAS, Ali, Georges Duby, Lymes.
FADMI BOURAKBA Sara, Arthur Rimbaud, Istres
SOUTIJI Rayan, Arthur Rimbaud, Istres
SAID Maïzen, Nelson Mandela, Marseille.



LE MONDE A DEUX PIÈCES

INTRODUCTION

Tous les jours, nous utilisons des pièces et des billets pour payer. Nous nous sommes demandés si avec seulement 2 valeurs m et n de pièces nous pouvons payer tous les montants.

Si un couple de nombres (m, n) peut former le chiffre 1, alors il est possible de faire tous les montants entiers. En effet, tous les nombres sont des multiples de 1.
—> si on a 1, on a tous les montants

Avec rendu de pièces

SOMMES que l'on peut obtenir :

$$\begin{aligned} S &= 0m + 0n - 0m - 0n \\ &= (0-0)m + (0-0)n \\ &= 0m + 0n \end{aligned}$$

LES CAS NON FONCTIONNELS :

D'abord nous avons le cas du couple de nombres pairs :

$$\begin{array}{l|l} m \text{ est pair : } m=2k & am + xm = \\ m \text{ est pair : } m=2l & a \times 2k + x \times 2l = \\ & 2(a \times k + x \times l) \end{array}$$

donc nous ne pourrions pas former de nombre impair, donc 1 n'est pas possible à former.

Aussi nous avons le cas du couple de nombres avec un diviseur commun > 1 :

soit m et n ont un diviseur commun :

$$\begin{aligned} m &= 5 \times d & n &= 7 \times d \\ \text{donc } am + xn &= d \times (a \times 5 + x \times 7) \end{aligned}$$

Donc seulement des multiples de d sont formés.

LES CAS TOUJOURS FONCTIONNELS :

Nous pouvons résumer des cas qui marchent toujours avec ces formules :

• Si $m \times x = n + 1$, alors on peut toujours obtenir : $m \times x - n = 1$

Par exemple : $m=6$ $n=11$
 $6 \times 2 = 12$ donc $12 - 11 = 1$.

• Si $m \times x = n - 1$, alors on peut toujours obtenir : $n - m \times x = 1$

Par exemple : $m=5$ $n=11$
 $5 \times 2 = 10$ donc $11 - 10 = 1$.

Sans rendu de pièces

Peut-on (sans rendu) construire tous les nombres entiers avec le couple de m et n ?

Pair = impossible car Pair + Pair = Pair



Légende :

✓ = ajouter la valeur de gauche

✗ = ajouter la valeur de droite

... = valeur à partir de laquelle d'autres valeurs peuvent se répéter

... = produit de m et $n = 5 \times 7 = 35$

○ = valeur à partir de laquelle on peut tout former.



—> 24

Trouver un lien entre le couple de valeurs (m, n) et la valeur à partir de laquelle on trouve tous les chiffres.

Relation de proportionnalité ?

m	n	N
5	1	0
5	2	4
5	3	8
5	4	12
5	5	X
5	6	20
5	7	24
5	8	28
5	9	32
5	10	X

—> N = Nombre à partir duquel on peut calculer tous les nombres.

Bas de 4

—> impossible

m	n	N
3	1	0
3	2	2
3	3	X
3	4	6
3	5	8
3	6	X
3	7	10
3	8	12
3	9	X
3	10	18

Bas de 2

$$N = (m-1) \times (n-1)$$

$$\text{Ex : } N = (5-1) \times (2-1)$$

$$N = 4$$

Et pour les valeurs gigantes ?

Nous nous demandons alors quelle formule pourrait prouver que $N = (m-1) \times (n-1)$ est juste sans connaître m et n ?

A partir de M , comment obtenir les nombres suivants ?

$$M = am + bn$$

$$1 = vm + un$$

$$M+1 = \underbrace{am + bn}_M + \underbrace{vm + un}_1$$

$$M+1 = (a+v)m + (b+u)n$$

$$M+x = am + bn + x(vm + un)$$

$$M+x = am + bn + xvm + xun$$

$$M+x = (a+xv)m + (b+xu)n$$

$$\text{Si } x > -\frac{a}{v} : (a+xv)m + (b+xu)n$$

$$\text{Si } x > -\frac{b}{u} : (a+xv)m + (b+xu)n$$

$$\text{Pour : } m < n, a \text{ et } b \geq 0, v \text{ et } u \in \mathbb{Z}$$

Exemple : $m=3$ $n=7$

$$M = 8 \times 3 + 2 \times 7$$

$$1 = 2 \times 3 + 1 \times 7$$

$$M+1 = 8 \times 3 + 2 \times 7 + (-2) \times 3 + 1 \times 7$$

$$M+1 = 6 \times 3 + 3 \times 7$$

$$x=5$$

$$M+x = 8 \times 3 + 2 \times 7 + 5(-2 \times 3 + 1 \times 7)$$

$$M+x = 8 \times 3 + 2 \times 7 - 10 \times 3 + 5 \times 7$$

$$M+x = -2 \times 3 + 7 \times 7$$

! On ne peut pas avoir un nb de pièces négatif

$$12 \text{ faut regarder si } x > -\frac{a}{v} \text{ ou si } x > -\frac{b}{u}$$

$$-\frac{a}{v} = -(-\frac{8}{2}) = 4 \text{ et } -\frac{b}{u} = -\frac{2}{1} = -2 \text{ donc } 4 > -2$$

$$\text{Donc } x > -\frac{a}{v}$$

$$M+5 = (-2 \times 3 + 7 \times 7)$$

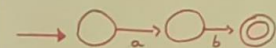
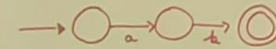
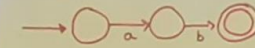
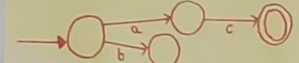
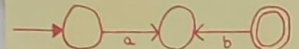
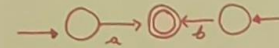
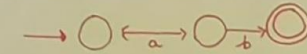
$$M+5 = 5 \times 3 + 4 \times 7$$

Automates Finis

• L'état initial, il est indiqué par une flèche détachant et signifie le départ.

• L'état final, il est indiqué par un double rond et signifie l'arrivée. Il est possible de le quitter.

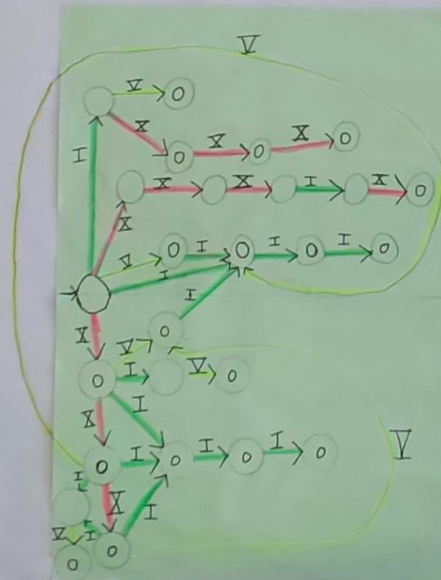
- 1 Il n'y a pas de double flèche
- 2 Il n'y a pas de flèche "sans indication"
ex: lettre, syllabe,...
- 3 Il n'y a qu'un seul état initial
- 4 Il y a au moins un état final
- 5 Il n'y a pas d'état inaccessible
- 6 Il n'y a pas d'état inutile



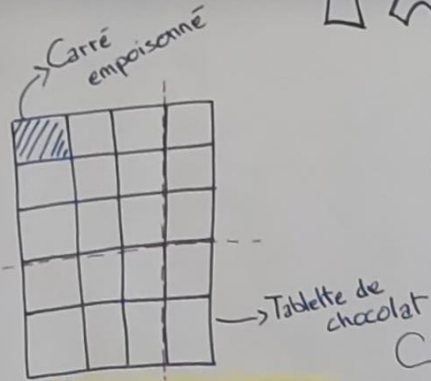
AUTOMATE DE NOMBRES ROMAIN DE 1 à 39:

V = JAUNE
I = VERT
X = ROSE

X=10 V=5 I=1
V → 1 fois
X, I → max 3 fois d'affilé
→ possible soustraction



TABLETTE DE CHOCOLAT

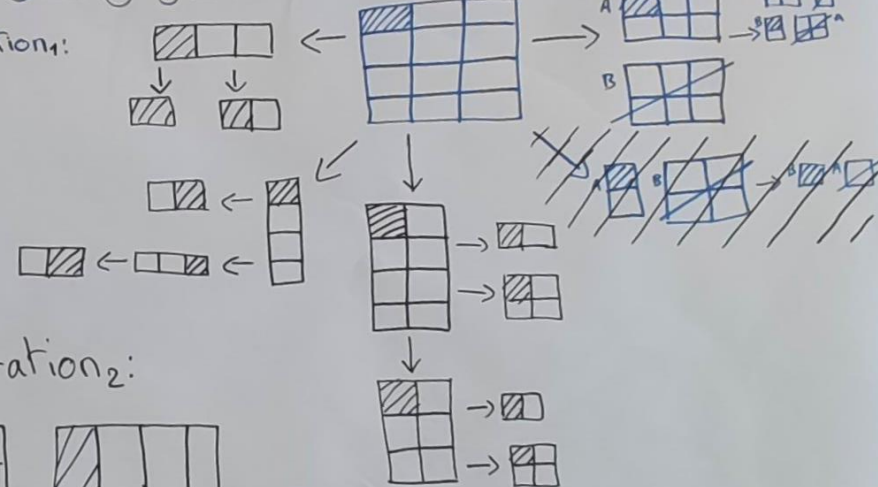


Règle₁: À chaque tour, une personne coupe la tablette horizontalement ou verticalement et mange la partie sans le carré empoisonné puis donne la partie à l'autre.
Se joue à 2 personnes.

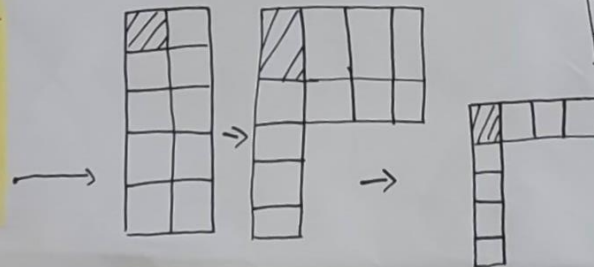
Règle₂: Se positionner sur un carré et prendre celui en bas à droite.

Stratégie gagnante: Former des carrés.

Démonstration₁:



Démonstration₂:



LE Dobble

jeu actuel:
↳ 55 cartes
57 symboles différents
8 symboles par carte

* quel est le + petit jeu
de Dobble possible ?

* comment est construit
le Dobble ?

0 symbole $\Rightarrow$ impossible
1 symbole $\Rightarrow$ impossible
2 symboles $\Rightarrow$ impossible

3 symboles



possible avec 3 symboles
au total.



A $\Rightarrow$ symbole / carte
C $\Rightarrow$ carte total
S $\Rightarrow$ symboles total

$$A^2 - A + 1 = C = S$$

même valeur

A = 4 symbole

A-1
car on retire
le symbole choisi



donc $A \times (A-1)$

$$A = \frac{-1 + \sqrt{4n-3}}{2}$$

régle générale $\Rightarrow$

$$A = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

avec: $a = 1 \neq 0$
 $b = -1$
 $c = 1 - 3$





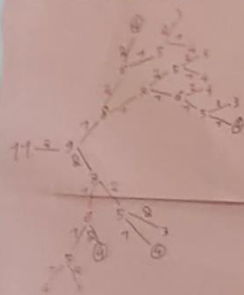
Les Batonnets

100% des gagnants ont joué

Règles :

- Vous avez un certain nombre de bâtonnets devant vous. Chacun à votre tour, vous pouvez retirer soit un ou deux bâtonnets. La personne qui retire le ou les derniers bâtonnets gagne le jeu.

Analyse de probabilité lorsque l'adversaire retire 2 bâtonnets quand il commence.

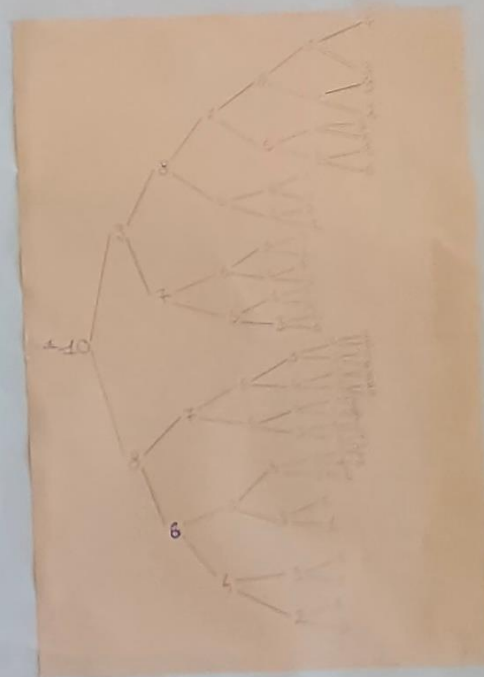


Stratégie gagnante par récurrence

- * Avec au plus 2 bâtonnets à pouvoir enlever l'adversaire est en position perdante lorsque quand son tour vient le nombre restant de bâtonnets est un multiple de 3:
 $\hookrightarrow 3m = \text{perdant}$ Récurrence : $m=1$: 3 = perdant. Vrai
 • Suppose que c'est vrai pour m : $3m = \text{perdant}$
 $\Rightarrow 3m+1$ et $3m+2$ sont donc des situations gagnantes.

Règle général selon le nombre de bâtonnets maximum qu'on peut retirer :

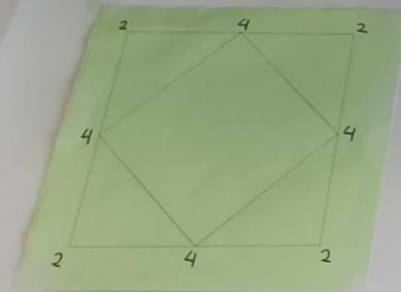
- * Si on peut enlever k bâtonnets l'adversaire sera en situation perdante lorsque quand son tour vient le nombre de bâtonnets est un multiple de $k+1$



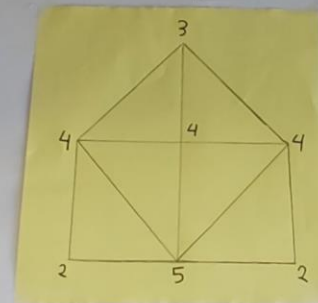
CYCLES ET CHEMINS EULÉRIENS

Nous disposons d'un graphe. En partant d'un point d'intersection du dessin, il faut passer par toutes les arêtes qu'une seule fois sans jamais lever le crayon. Il est possible de passer plusieurs fois par une intersection.

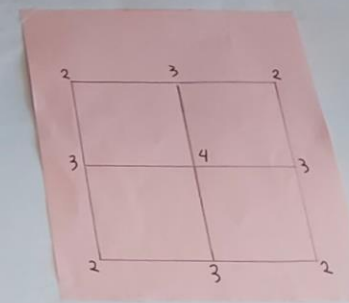
CYCLE
Tous les degrés
doivent être pairs



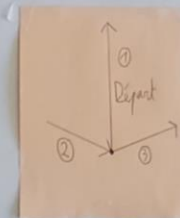
CHEMIN
Début et fin du tracé
par un impair



CHEMIN
Tracé impossible si
+ de 2 degrés impairs



DÉMONSTRATION



L'infini

Listes de nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

entiers naturels ($\mathbb{N}$): 1, 2, 3...

nombre pairs: 2, 4, 6...

nombre premiers: 2, 3, 5...

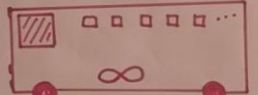
nombre relatifs ($\mathbb{Z}$): 0, 1, -1, 2...

Couples d'entiers naturels: (0,0), (1,0)...

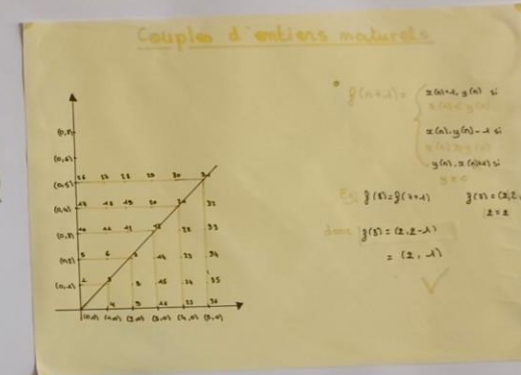
∞

Def énumération

- énumération d'un ensemble E
- ... $\rightarrow$ ordre des $\mathbb{N}$
- fonction $\mathbb{N} \rightarrow E$
- + au plus un numéro
- + un numéro pour tous



$\mathbb{Q}$



$\mathbb{N}$

Entiers relatifs

..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

$g(0) = 0$ $g(1) = 2$ $g(2) = -3$
 $g(-1) = -1$ $g(4) = -2$ $g(3) = 4$
 $g(2) = -1$ $g(5) = 3$ $g(6) = -4$

$g(k+1) = \begin{cases} -g(k)+1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -g(k) & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Ex:
 $g(2) = -1$
 $g(3) = g(2+1) = -(-1)+1 = 2$
 $-g(2)+1 = -(-1)+1 = 2$

∞

Hôtel de Hilbert

1) $m \rightarrow m+1$
 2) $m \rightarrow 2m$
 3) $\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$

$k \rightarrow 2k+1$
 2 clients
 jamais dans
 la même
 chambre*

si $2k+1 = 2k'+1$
 alors
 $k = k'$

si $2m = 2m'$
 alors
 $m = m'$

si $m \neq m'$
 alors
 $2m \neq 2m'$



∞

∞



INES
PENLOPE
PÉREZ

INFINIS

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{Q}|$$

$$|\mathbb{N}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$$

Arrive un autocar Infini
Que faire?

$$|\mathbb{Z}| \rightarrow |\mathbb{N}|$$

$$x \rightarrow \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit $y \in \mathbb{N}$
Soit y est pair
Donc $x = \frac{y}{2}$ tq $f(x) = y$

Soit $y \in \mathbb{N}$
Soit y est impair
Donc $x = \frac{y+1}{2}$ tq $f(x) = y$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \hline & & & & & & \end{array} \rightarrow y$$

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}^2|$$

Soit x un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$

Soit a, b un couple de nombres naturels

$\mathbb{N}^2$: couple d'entier
 $\mathbb{N}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
 $(a, b) \rightarrow 2^a(2b+1)$

$$\begin{array}{l} \text{Soit } b_0 \in \mathbb{N} \\ \begin{array}{l} \nearrow 2^{b_0} \\ \searrow 2^{b_0} \end{array} \end{array}$$

On pose a soit le plus grand naturel possible
 $b_0 = 2^a$
si b_0 est pair alors $2b_0$ tq b_0
Donc $b_0 = 2^a + 2^a$ - contradiction
Ceci induit que b_0 est impair.

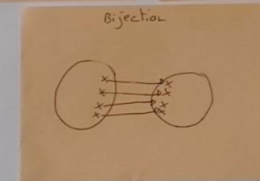
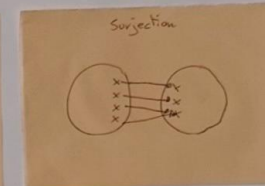
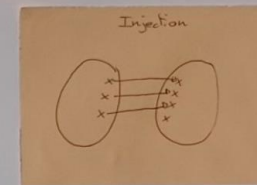
$$\forall x, y \{f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y\}$$

Injection

$$\forall y \exists x y = f(x)$$

Surjection

Bijection



$$|\mathbb{N}| < |\text{suites de } 0 \text{ et } 1|$$

1 $\rightarrow$ 1 0 1 0 1 ...
2 $\rightarrow$ 1 1 0 0 1 1 ...
3 $\rightarrow$ 1 1 1 0 0 ...
4 $\rightarrow$ 1 0 1 0 0 0 ...
5 $\rightarrow$ 1 0 0 1 0 0 ...
...

$$|\mathbb{N}| < |[0,1]|$$

$$|[0,1]| = |\mathbb{R}|$$

$$|[0,1]| \rightarrow |\mathbb{R}| \quad f(x) = x$$

$$|\mathbb{R}| \rightarrow |[0,1]| \quad x \rightarrow \frac{1}{x+2}$$

$$|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$$

Pour créer z à partir de x et y on place x sur les positions impaires et y sur les positions paires.

$$x = 85,9816 \quad y = 142,352$$

$$z = 18452,9385126$$





Mesure du temps

- Quelle heure sera-t-il dans 100h et 1000h?
- Quelle est la proportion de vendredi parmi les 13 du mois?

Modulo:

- $100 \bmod 24 = 4$
 $\hookrightarrow 100 - 24 \times 4 = 100 - 96 = 4$
- $1000 \bmod 24 = 16$
 $\hookrightarrow 1000 - 24 \times 41 = 1000 - 984 = 16$
- Dans 100h il sera 14h.
- Dans 1000h il sera 2h.

Exemple d'une année commençant par un vendredi:

Lundi: 4 Jeudi: 0 Dimanche: 3
Mardi: 5 Vendredi: 1
Mercredi: 6 Samedi: 2

$\rightarrow$ Pour 2027, on note A1 (année normale) pour 1 vendredi = 13.

Le 13^e jour de chaque mois.

	année normale	année bissextile
janvier	13	13
février	44	44
mars	72	73
avril	103	104
mai	133	134
juin	164	165
juillet	194	195
août	225	226
septembre	256	257
octobre	286	287
novembre	317	318
décembre	347	348

Le jour de la semaine pour chaque 13 du mois.

année normale	année bissextile
$13 \bmod 7 \rightarrow 6$	$13 \bmod 7 \rightarrow 6$
$44 \bmod 7 \rightarrow 2$	$44 \bmod 7 \rightarrow 2$
$72 \bmod 7 \rightarrow 2$	$73 \bmod 7 \rightarrow 3$
$103 \bmod 7 \rightarrow 5$	$104 \bmod 7 \rightarrow 6$
$133 \bmod 7 \rightarrow 0$	$134 \bmod 7 \rightarrow 1$
$164 \bmod 7 \rightarrow 3$	$165 \bmod 7 \rightarrow 4$
$194 \bmod 7 \rightarrow 5$	$195 \bmod 7 \rightarrow 6$
$225 \bmod 7 \rightarrow 1$	$226 \bmod 7 \rightarrow 2$
$256 \bmod 7 \rightarrow 4$	$257 \bmod 7 \rightarrow 5$
$286 \bmod 7 \rightarrow 6$	$287 \bmod 7 \rightarrow 0$
$317 \bmod 7 \rightarrow 2$	$318 \bmod 7 \rightarrow 3$
$347 \bmod 7 \rightarrow 4$	$348 \bmod 7 \rightarrow 5$

	A	B
0	3	2
1	1	1
2	1	1
3	2	3
4	2	2
5	2	1
6	1	2

2001: A4 $\rightarrow$ 2
2002: A5 $\rightarrow$ 2
2003: A6 $\rightarrow$ 1
2004: B0 $\rightarrow$ 2
2005: A2 $\rightarrow$ 1
2006: A3 $\rightarrow$ 2
2007: A4 $\rightarrow$ 2
2008: B5 $\rightarrow$ 1
2009: A0 $\rightarrow$ 3
2010: A1 $\rightarrow$ 1
2011: A2 $\rightarrow$ 1
2012: B3 $\rightarrow$ 3
2013: A5 $\rightarrow$ 2
2014: A6 $\rightarrow$ 1

2015: A0 $\rightarrow$ 3
2016: B1 $\rightarrow$ 1
2017: A3 $\rightarrow$ 2
2018: A4 $\rightarrow$ 2
2019: A5 $\rightarrow$ 2
2020: B6 $\rightarrow$ 2
2021: A1 $\rightarrow$ 1
2022: A2 $\rightarrow$ 1
2023: A3 $\rightarrow$ 2
2024: B4 $\rightarrow$ 2
2025: A6 $\rightarrow$ 1
2026: A0 $\rightarrow$ 3
2027: A1 $\rightarrow$ 1
2028: B2 $\rightarrow$ 1

fin du cycle de 28 ans

2101

1^{er} siècle:

1 cycle = 68 vendredis = 13

$48 \times 3 + 27 + 1$

3 cycles

$144 + 28 = 172$

2^{ème} siècle:

$48 \times 3 + 27 + 2$
 $144 + 27 + 2 = 173$

3^{ème} siècle:

$48 \times 3 + 27 + 2$
 $144 + 27 + 2 = 173$

4^{ème} siècle:

$48 \times 3 + 27$
 $144 + 27 = 171$

Somme des vendredis 13 de chaque siècle:

$172 + 171 + 173 + 173$
 $= 689$

Calcul de la proportion de vendredi 13 sur 4 siècles:
 $\frac{689}{400 \times 12} \approx 0,143$

Gabriel Maria Lami

Les couples impossibles

Exemple 1

Problème:

- en les comptant par 4 il en reste 1 donc $x = 4k + 1$
- en les comptant par 6 il en reste 2 donc $x = 6m + 2$
- ↳ $x = 4k + 1 \Rightarrow 4k$ est pair $\Rightarrow x$ est impair (pair + 1 = impair).
- $x = 6m + 2 \Rightarrow 6m$ est pair $\Rightarrow x$ est pair (pair + pair = pair).

Conclusion: Un nombre ne peut pas être pair et impair en même temps.
 $\Rightarrow$ Aucune solution possible.

Exemple 2

Problème:

- en les comptant par 6 il en reste 5
- en les comptant par 9 il en reste 7
- on sait que le PGCD de 6 et 9 est 3.
- ↳ $x \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow x = 3r + 2$ car $5(3r+2) + 2 \dots$
- $x \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow x = 3s + 1$ car $7(3s+2) + 1 \dots$

On on sait que le reste est unique et ici on trouve 2 restes différents, donc il n'y a pas de solution possible ici.

Règle générale pour les couples impossibles

Pour 2 diviseurs: a et b avec des restes R_1 et R_2 .
Il faut trouver le PGCD de a et b noté d ici.

Puis diviser R_1 et R_2 par d .
 $\Rightarrow$ Si $R_1 \pmod{d} \neq R_2 \pmod{d}$

alors solution impossible sinon possible.

En résumé: Un problème est impossible si:

- les conditions se contredisent (pair et impair).
- les restes ne sont pas égaux modulo le PGCD des diviseurs.

Les restes Chinois

Comment trouver le pas?

On a multiplié 3, 5, 7 pour trouver le pas entre chaque nombre marchant avec la consigne.

$$3 \times 5 \times 7 = 105$$

... On a aussi remarqué que pour chaque groupe, il manque 1 personne pour qu'il soit complet:

$$3-1=2; 5-1=4; 7-1=6$$

DONC $105-1 = 104$

Soient des soldats dont on ignore le nombre:

- en les comptant par 3, il en reste 2
- en les comptant par 5, il en reste 4
- en les comptant par 7, il en reste 6

Combien y'en a-t-il?

La variante du crible d'Eratosthène

Cette variante compte 3 règles:

I - Pour les nombres rangés par 5, restant 4:
Le nombre divisible par 5, et donc son chiffre des unités sera donc 4 ou 9.

II - Pour les nombres rangés par 7, restant 6:
Il faut que $m-6$ soit divisible par 7

III - Pour les nombres rangés par 3, restant 2:
Le $m-2$ soit un nombre tel que la somme de ses chiffres est un multiple de 3

Voici la variante:

14; 19; 24; 29; 34; 39; 44; 49; 54; 59; 64; 69; 74; 79; 84; 89; 94; 99; 104; 109.

Pour les grands nombres

la règle générale avec le 105

Pour savoir si la est solution:

- diviser le pas
- comparer le reste à la plus petite solution du problème.

Si le reste est égal à la plus petite solution, il sera aussi une des solutions au problème dans le cas contraire, il n'y a pas de solution.

exemple 1:

$$\begin{array}{r} 25470 \\ - 210 \\ \hline 4570 \\ - 420 \\ \hline 950 \\ - 315 \\ \hline 635 \end{array}$$

le reste est égal à 104

25470 est égal à 104, 16594

donc une solution est donc pas une solution.

exemple 2:

$$\begin{array}{r} 16594 \\ - 105 \\ \hline 16489 \\ - 105 \\ \hline 16384 \\ - 105 \\ \hline 16279 \\ - 105 \\ \hline 16174 \\ - 105 \\ \hline 16069 \end{array}$$

le reste n'est pas égal à 104

16594 est égal à 104, 16594

donc une solution est donc pas une solution.

Hypothèse

D'après nos recherches, un bataillon compte normalement entre 300 et 1200 soldats. Sachant que l'armée chinoise est très grande on estime que un bataillon chinois au III^{ème} siècle compte entre 4000 et 1100 soldats. Cet intervalle nous permet d'avoir le nombre exact de soldats: 1049

LA FORMULE $104 + 105n$

$$\rightarrow 104 + 105n$$

$$(34 \times 3 + 2) + (35 \times 3 + n) = 3(34 + 35n) + 2$$

$$\rightarrow 104 + 105n$$

$$(20 \times 5 + 4) + (21 \times 5 + n) = 5(20 + 21n) + 4$$

$$\rightarrow 104 + 105n$$

$$(14 \times 7 + 6) + (15 \times 7 + n) = 7(14 + 15n) + 6$$

la multiplication

départ → B-1 → A-1 → D+1 → C+1 → arrivée

B=0 A=0

D-1 → A+1 → D=0

les jetons

Qu'est ce que c'est ?
présenté par
Lilia, Hugo, Timéo et Lya

Machines à REGISTRE

Une machine à registre:
version simple pour
Comprendre le fonctionnement des PROGRAMMES informatiques
- constituée de registres
- réserve de jetons ∞
+ 1 condition
2 actions possibles
↳ incrémenter ou décrémenter (ajouter ou enlever 1 à un registre)
MÊME SI peu d'actions on peut faire des opérations complexes (multiplication, division...)

La copie de registre

A B C

départ → A-1 → B+1 → C+1 → arrivée

A=0 B=0 C=0

C-1 → A+1

Parc d'attraction (application concrète)
↳ dans un parc d'attraction, les tarifs sont 12€ par enfant et 20€ par adulte.

départ → A-1 → C+1 → C+1 → C+1 → G+1 → arrivée

A=0

B-1 → C+1 → C+1 → C+1 → C+1 → G+1 → arrivée

B=0

C-1 → F+1 → F+1 → F+1 → F+1 → arrivée

C=0

L'échange de registre.

A B C D

départ → A-1 → C+1 → arrivée

A=0

B-1 → D+1 → D-1 → A+1 → D=0 → C-1 → B+1 → C=0 → arrivée

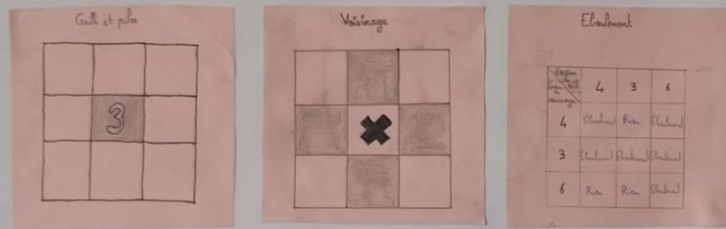
une vérif plus simple :

G	A	B	C	D	F
		●			

A = nb enfants
B = nb adultes
C = tarif intermédiaire
G = nb de personnes
F = revenu total



CIRCUITS EN SABLES



La première condition à remplir est "ou".
 Il faut un circuit avec 2 entrées et une sortie.

Si l'une des entrées s'éboule alors l'éclaboussure s'étend jusqu'à la sortie.

Les chiffres représentent les nombres de grains de sable.

La deuxième condition à remplir est "et".
 Il faut un circuit avec 2 entrées et une sortie.

Pour que l'éclaboussure s'étende jusqu'à la sortie il faut que les 2 entrées soient vraies et que le croisement en rose doit avoir 4 grains pour contenir l'éclaboussure.

La troisième condition est le "croisement de fils".
 Les deux fils doivent se croiser sans se toucher l'un ou l'autre.

Exemple: Si une des entrées est vraie, alors on sait que tout le sable se fera d'elle soit vraie.

La quatrième condition est "l'union de fils".
 Dans un dernier, on doit être capable d'accéder aux cases blanches ET majorer avec notre voisinage.

Voir dernière pour explications

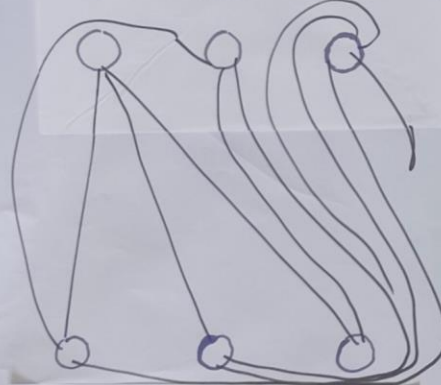
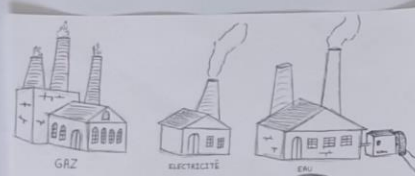
VOISINAGE	Porte "ou"	Porte "et"	Porte de Croisement	Union des fils
				✓
				✗
				✓
				✓



COUPON CÉSAR
BENBLIDIA Lamine
SAHRAOUI Salma
GARCIN-MILLER Hugo

Graphes

Planaire

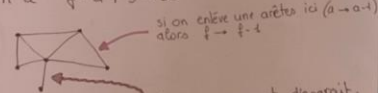


Recherche de la Formule
qui relie f, a, s .

$$f - a + s = 2 \quad \begin{cases} (a-f)+2=s \\ (a-s)+2=f \\ (f-s)+2=a \end{cases}$$

DÉMONSTRATION de la formule d'Euler

On a $f - a + s = x$



si on enlève une arête un sommet disparaît.
si a devient $a-1$ alors s devient $s-1$

$$\text{Donc } (f-1) - (a-1) + s = x$$

Prouver que les GRAPHES

$K_{3,3}$:



et K_5 :



Sont impossible

DONC...

Pour $K_{3,3}$ on a $\frac{2 \times 9}{13} = \frac{18}{13} \approx 3,6$

ET Pour K_5 on a $\frac{2 \times 11}{12} = \frac{22}{12} \approx 2,86$

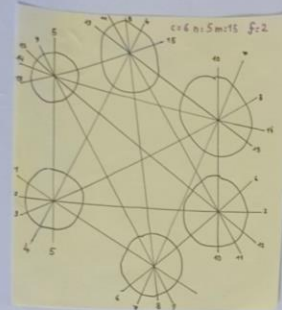
MOYENNE ARÊTES/FACES

Formule :

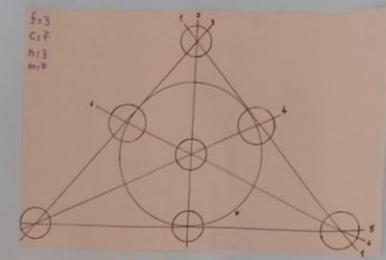
$$\frac{2 \times a}{f}$$

exemple :

on a :
 $a = 7$
 $f = 4$
 $s = 5$
Donc $\frac{2 \times 7}{4} = \frac{14}{4} = 3,5$



DOUBLE



Formule

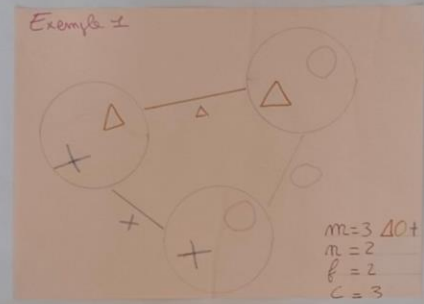
$m = 57$ (nb de motifs différents)
 $n = 8$ (nb de motifs par carte)
 $g = 8$ (nb de cartes qui apparaissent un motif)
 $c = 55$ (nb de cartes)

$m \times g \rightarrow$ nb total de motifs
 $c \times n \rightarrow$ nb de motifs
 $n \rightarrow$ nb de motifs par carte

Δ ne marche pas pour le double
 $c > d$ $m > n$

$m > n$

• Si $m = n$: 1 seule carte possible (car tous les motifs sont dessus)
 • Donc m doit être strictement supérieur à n pour avoir plusieurs cartes



Pour l'exemple 1

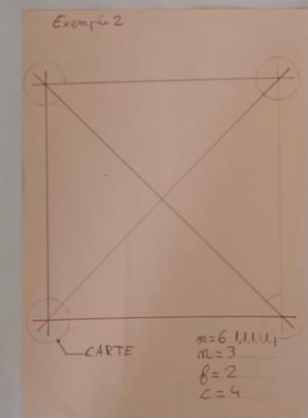
- Pas de liaison com
 La seulement 3 au
 - On a vérifié av
 $\hookrightarrow \frac{m \times g}{n} = c \quad \frac{3 \times 2}{2} = 3$

Pour l'exemple 2

- On a vérifié avec la formule
 $\hookrightarrow \frac{m \times g}{n} = c \quad \frac{6 \times 2}{3} = 4$

• Chaque motif apparaît sur g cartes
 • Chaque carte contient n motifs
 • Le nombre de paires carte-motif est donc: $g \times m$
 • Mais chaque carte contribue à n paires (car elle a n motifs)
 On trouve alors:

• $n = m - 1$
 $\hookrightarrow$ chaque carte est associée à $m - 1$ autres cartes via un symbole commun
 • Pour un jeu équilibré on préfére:
 $n = m - 2$ ou $n = m - 3$
 ...
 $\frac{m \times 2}{c - 1} = c$
 $\hookrightarrow n$
 $m = \frac{c \times (c - 1)}{2} = \text{nombre entier}$



BATONNETS

Maxime
Hanna
Lilia
Pénélope

Cas n°1
But: prendre le dernier battonnet
En choisissant 1 ou 2

Propriété:

- Si n n'est pas un multiple de 3 alors on a une stratégie gagnante.
- Position perdante: multiple de 3

Exemple:

Cas n°2
But: ne pas prendre le dernier battonnet en choisissant 1 ou 2

Propriété:

- Si n n'est pas divisible par 3 et qu'il reste 1, alors j'ai une stratégie gagnante.
- Position perdante: divisible par 3, reste 1

Cas n°3
BUT: prendre le dernier battonnet
POSSIBILITÉ: choisir 1, 2, ou 3 batonnets

PROPRIÉTÉ:

- Si n n'est pas un multiple de 4 alors on obtient une stratégie gagnante et inversement

Principe d'induction:

- $P(0), P(1), P(2)$ Gagnante
- si $P(3k), P(3k+1), P(3k+2)$ alors $P(3k+3), P(3k+4), P(3k+5)$ Perdante

On montre que si on part de $3k+4$ ou de $3k+5$ on peut forcer notre adversaire à nous ramener vers $3k+1$ ou $3k+2$ (qui sont des positions gagnantes).

Principe d'induction:

- $P(0), P(1), P(2), P(3)$
- si $P(3k+1), P(3k+2), P(3k+3)$ alors $P(3k+4), P(3k+5), P(3k+6)$

On montre que si on part de $3k+5$ ou de $3k+6$ on peut forcer notre adversaire à nous ramener vers $3k+2$ ou $3k+3$.

CAS GENERAL
Soit R un nombre.

PROPRIÉTÉ:

- Si n n'est pas un multiple de $R+1$ alors on obtient une stratégie gagnante et inversement
- Si on envoie l'adversaire sur une position gagnante (G), cela signifie que l'on est déjà perdant.



GRAPHE EULERIEN

①

0 SOMMET DE d° IMPAIR $\Leftrightarrow$ CYCLE EULERIEN

②

2 SOMMETS DE d° IMPAIR $\Leftrightarrow$ CHEMIN EULERIEN

1/

TOUS LES SOMMETS
ONT d° PAIR

$\Rightarrow$ SI JE PEUX ENTRER SUR UN SOMMET ALORS
PEUX SORTIR $\rightarrow$ RECOMMENCER ET FUSIONNER

DONC IL Y A SEULEMENT DES
SOMMETS DE d° PAIR

$\Leftarrow$ DANS UN CYCLE EULERIEN, ON UTILISE UNE
ARETE POUR RENTRER DANS UN SOMMET ET UNE AUT
POUR EN SORTIR

2/

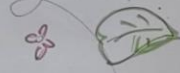
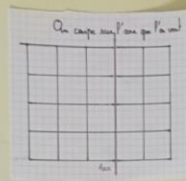
$\Rightarrow$ IL FAUT COMMENCER ET FINIR PAR UN SOMMET IMPAIR

$\Leftarrow$ MÊME CHOSE QUE POUR LE 1/.

RYAN
SAMUEL
GABRIEL
RAPHAËL

LE PROBLEME DU CHOCOLAT EMPOISONNÉ

1^{ère} règle

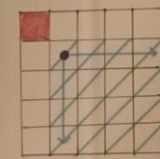


Principe d'induction

$p(n)$ $p(n+1)$ $1 \leq n$



2^e Règle



- Cases supprimées
- Caseau empoisonnée
- Caseau choisi
- démarcations

