

# Stage Hippocampe

**Dates :** 26, 27 et 28 Janvier 2026

**L'établissement :** Lycée Montgrand (Marseille)

**Les élèves :** 20 élèves de 1ere et Terminale  
(10 garçons et 10 filles)

**Professeur accompagnant :** M Laurent, professeur  
de mathématiques

**Responsable du stage :**

Anne Pichon, Maîtresse de conférence à l'I2M

**Les tuteurs :**

Axel Gastaldi, doctorant à l'I2M

Raphaël Henry, doctorant à l'I2M

Michael Puschnigg, Professeur d'université à l'I2M



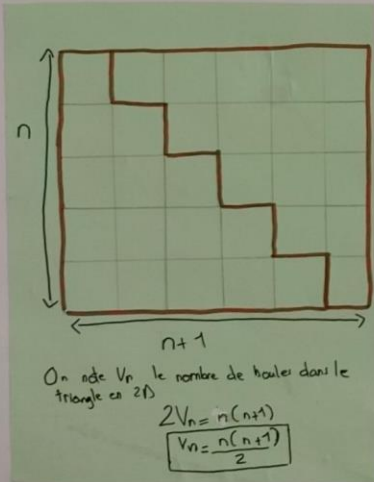
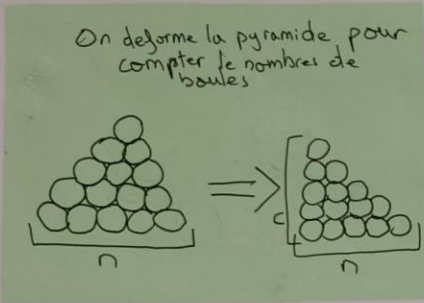
## Stage de Mathématiques

### Thème du stage : « Géométrie en liberté ! »



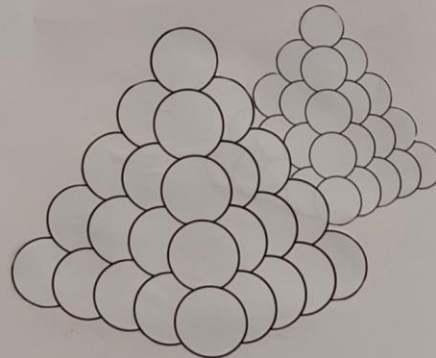
Calcul du nombre de boules dans une figure 2D:

On part d'un triangle isocèle que nous allons transformer en rectangle de cette façon le nombre de boules à la base = au nombre de boules à la hauteur.



Les Pyramides de jardins.

Combien de boules faut-il pour construire un triangle en 2D? Et pour une pyramide à base triangulaire de côté n en fonction du nombre de boules dans chaque côté.



Calcul du nombre de boules dans une figure en 3D:

On pose  $U_n$  le nombre de boules dans la pyramide 3D de côté n. On transforme une pyramide 3D en superposant des triangles 2D.

$$U_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$= \frac{1(1+1)}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (1+2+\dots+n) + \frac{1}{2} (1^2+2^2+\dots+n^2)$$

Partons du principe que la formule est un polynôme de degré 3:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$$

On résout un système de 4 équations à 4 inconnues et on trouve la formule:

$$\rightarrow \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

Pour conclure

$$U_n = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} \left( \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \right)$$

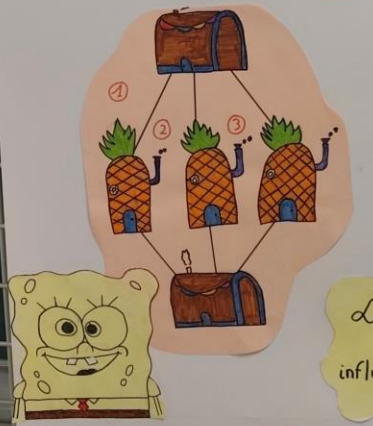


# Abonnés au gaz

Consigne : Peut-on relier 3 maisons à 3 usines sans qu'elles ne se croisent ?

L'inversion maison/usine n'impacte pas le résultat car lorsqu'une maison est reliée à l'usine, l'usine est reliée à la maison.

Théorème : On peut toujours relier 2 usines à un nombre quelconque de maisons.



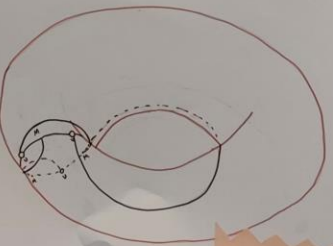
On ne peut pas relier n maisons à m usines si n et m sont  $\geq 3$ .

Le positionnement influence-t-il le résultat ?

Et si on allait plus loin ?

Projection stéréographique

Sphère moins 1 point homéomorphe au plan. déformation gentille dans l'espace.  $\Rightarrow$  ça revient au même sur une surface plate: ça ne marche pas.



TORE

Fardat Saadouni  
Anisia Akko Hamadi  
Himad Beloum

# LE PROBLEME DU BERGER

Le problème du berger

Un berger doit surveiller son pâturage qui a la forme d'un polygone à n côtés par forcément convexe, avec des combes qui sont convexes et qui peuvent valoir  $2 \times 360^\circ$ .

Exemple de polygone à la forme d'un polygone à n côtés :

• : Combes  
■ : Champ de pâturage

Tous un polygone donné on peut construire :

- Une triangulation de polygone par des triangles dont les sommets sont des sommets du polygone.
- Une coloration des sommets par 3 couleurs tels que les sommets de chaque triangle ont 3 couleurs.

Démonstration par récurrence sur le nombre des sommets du polygone.

Initialisation:  $n = 3$

Coloration/Triangulation

Récurrence Cas 1

Sommets les plus éloignés Angle Aigu

Polygone à n côtés

R: 5  
B: 6  
V: 6

Triangulation  
Coloration

Coloration/Triangulation

Récurrence Cas 2

Le plus éloigné

Par récurrence sur l'aire du polygone.

On peut trianguler et colorer les polygones. Mais il reste un problème de récurrence on doit montrer que le polygone de départ. Mais on arrive à trouver à colorer le polygone de départ.

> [5] SOMME DE COULEUR  
> [5] SOMME DE COULEUR  
> [5] SOMME DE COULEUR

$\downarrow$   
SOMMES!  
CONTRADICTION

DONC IL Y A UNE COULEUR QUI APPARAÎT AU PLUS [5] FOIS.

# L'ADDITION DES TRESSSES

## DEFINITION

- Représentation de 2 ou plusieurs brins entrelacés
- Comparer 2 tresses, c'est comparer leur position, leur croisements leur début et leur fin
- Pour additionner des tresses, il faut simplement placer les tresses l'une au-dessus de l'autre ( $T_1 + T_2$ )
- Si on veut décaler une tresse, il faut enlever tous les croisements on se placera les brins (sans les découper)

EN QUOI L'ADDITION DES TRESSSES EST-ELLE DIFFÉRENTE DE CELLE DES ENTIERS ???



$B_n$  = l'ensemble des tresses à n brins.

### THEOREME

$B_n$  est engendré par

$$T_i = \begin{matrix} \diagup \\ \diagdown \end{matrix}$$

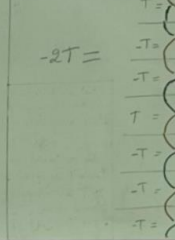
### INVERSE

$$T_i^{-1} = \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix}$$

- $B_n \cong \mathbb{Z}$
- $B_n$  a une infinité d'éléments.
- L'opération + est commutative sur  $B_n$ .

### Démonstration

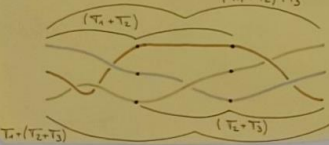
L'exemple suivant:  $T = \begin{matrix} \diagup \\ \diagdown \end{matrix}$   
on décale les brins



## THEOREME 1:

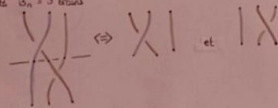
addition associative de 3 tresses  
 $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

Démonstration:



## Générateur de $B_n$

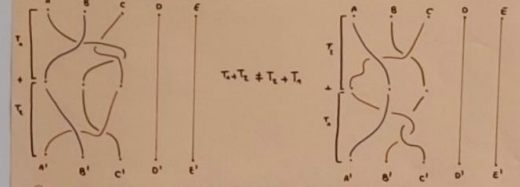
L'ensemble de tresses est engendré par n-1 générateur  
⇒ on les choisit de sorte qu'il y a un seul croisement les brins et les possibilités sont entre 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, ... n-1 et n: ce qui constitue n-1 générateur  
exemple  $B_3 = 3$  brins



## THEOREME 3

LA NON COMMUTATIVITÉ DE TRESSE À 3 BRINS OU PLUS.

Soit  $B_n$  l'ensemble de tresses à n brins, alors l'opération + sur  $B_n$  est non commutative pour tout  $n \geq 3$ .

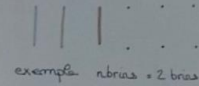


- On compare le départ et l'arrivée de chaque brins
- Pour généraliser le cas on rajoute des extrémités telles que D, D', et E, E'

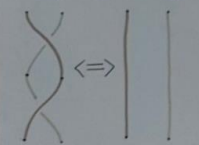
## Présence d'un 0:

$$T_1 + 0 = T_1 + 0 = T_1$$

la tresse de 0 à n brins:

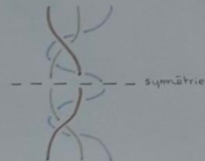


exemple n brins = 2 brins



## Inverse:

$$T_1 + T_2 = 0$$



## Un cavalier sur un Pneu!



Un cavalier se déplaçant suivant les règles d'échecs :

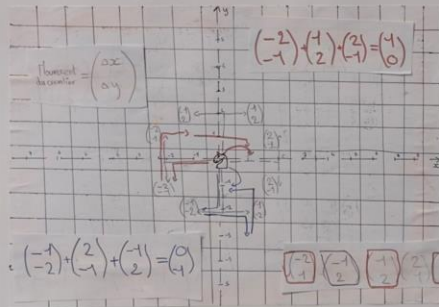


Est-il possible de passer sur toutes les cases sur un tore quadrillé?

un tore :



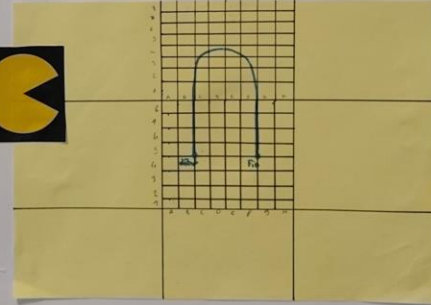
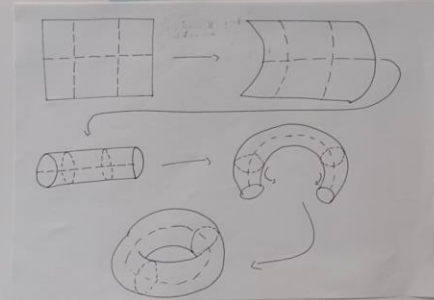
## Le déplacement du cavalier



Un tore est un solide géométrique représentant un tube courbé refermé sur lui-même.

## Déplacements sur un tore

### Création d'un tore



## UN TORE



### Le tour complet du cavalier

1	52	39	18	5	56	35	22
44	31	10	61	48	27	14	57
23	2	53	40	19	6	49	36
58	45	32	11	62	41	28	15
37	24	3	54	33	20	7	50
16	59	46	25	12	63	42	29
54	38	17	4	55	34	21	8
30	9	60	47	26	13	64	43

