Stage Hippocampe

Dates : 27-28-29 Avril 2026

L'établissement : Lycée Sacré Cœur (Aix-en-Provence)
Les élèves : 29 élèves de première et terminale
(15 garçons et 14 filles)
Professeurs accompagnants :
Mme Besbas, professeure de Mathématiques

Responsable du stage :
Anne Pichon, Professeure d'université à l'I2M
Les tuteurs :
Axel Gastaldi, Doctorant à l'I2M
Rayan Oufar, Doctorant à l'I2M
Yves Lafont, Professeur d'université à l'I2M

IRES
STAGES HIPPOCAMPE

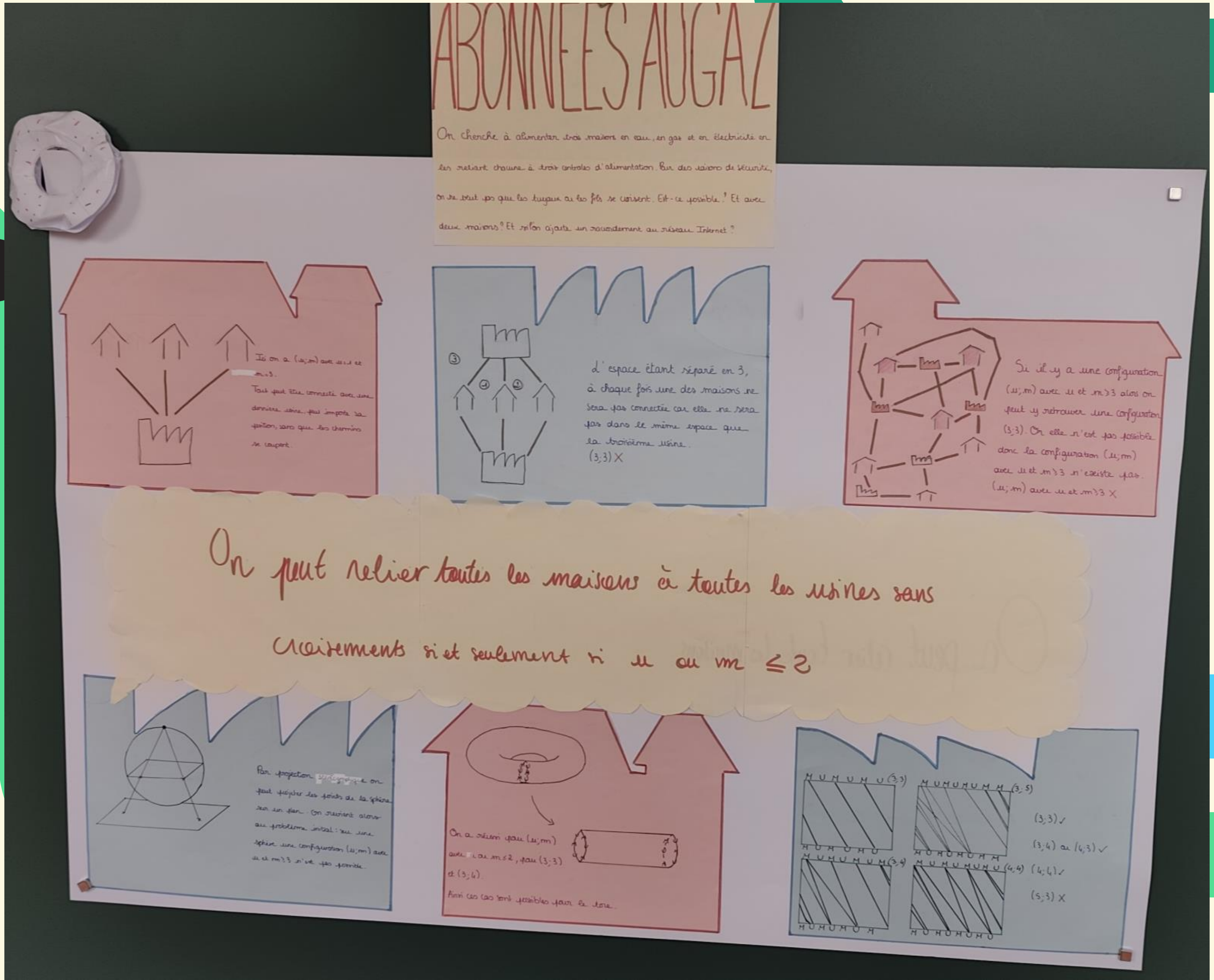
Stage de Mathématiques

Thème du stage : « Géométrie en liberté !»

amU Faculté des sciences Aix Marseille Université
Département IRES

Posters réalisés

amU Faculté des sciences
Aix Marseille Université
Département IRES



IRES
STAGES HIPPOCAMPE

IRES

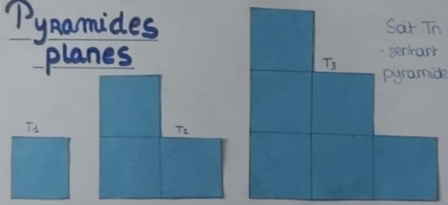
STAGES HIPPOCAMPE

Anna CATHELINEAU
Marie DURAND
Eliya NICOLAS
Morjane RAGUENEAU
Louise VACARISAS
Supervisé par Rayan Ier

PYRAMIDES

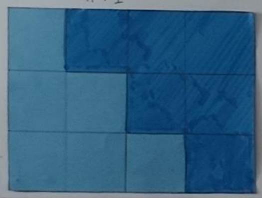
On cherche à décorer un jardin en créant des pyramides à plat mais en volume à l'aide de boules d'argiles. Nous souhaitons savoir combien de boules faut-il pour construire une pyramide à partir d'un alignement de 10 et 100 boules. On modélise la situation avec des cubes.

Pyramides planes



Soit T_n la suite représentant de billes pour une pyramide plane de côté n.

$T_{n+1} = T_n + (n+1)$



$= 2T_n$

$2T_n = (n+1)n \Rightarrow T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

→ Somme de Gauss

GÉOMETRIQUEMENT

On remplace n par n + 1 :

$T_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

Dans la formule de récurrence, on remplace T_n par son expression explicite

$T_{n+1} = (n+1) + T_n \Leftrightarrow (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$

$= 2(n+1) + n(n+1)$

$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

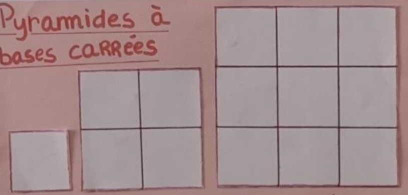
Par récurrence, la formule trouvée géométriquement est vérifiée.

$T_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

$T_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

RÉCURRENCE

Pyramides à bases carrées



Soit D_n la suite représentant la somme des carrés de côté n

$D_{n+1} = D_n + (n+1)^2$

En assemblant $3 D_n$, cela forme un pavé droit lorsqu'on ajoute le T_n correspondant

$l = n$; $L = n+1$; $h = n+1$

Donc $3D_n = V - T_n$

$D_n = \frac{n(n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}}{3}$

$= \frac{n(n+1)(1+2n)}{6}$

GÉOMÉTRIQUEMENT

Supposons que $D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que $D_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \Leftrightarrow \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

Or $D_{n+1} = D_n + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6}$

$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

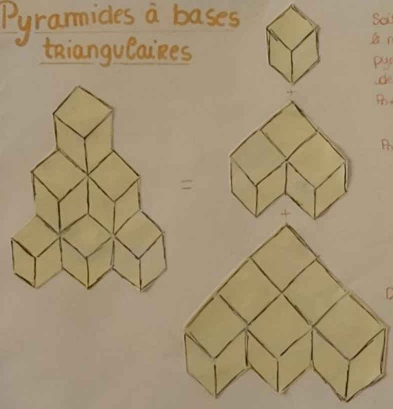
Par récurrence, la formule trouvée géométriquement est vérifiée

$D_{10} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

$D_{100} = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338\ 350$

RÉCURRENCE

Pyramides à bases triangulaires



Soit P_n la suite représentant le nombre de boules dans une pyramide à base triangulaire de côté n.

$P_{n+1} = P_n + T_{n+1}$

$P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$

$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2}}_{D_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}}_{T_n}$

Donc $P_n = \frac{D_n}{2} + \frac{T_n}{2}$

$= \frac{\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2}$

$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$

On peut également retrouver cette formule à l'aide du pivot de Gauss en résolvant un système linéaire à 5 inconnues :

On suppose que $P_n = \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{e}$

Avec cette méthode, $a = \frac{1}{6}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{3}$; $d = 0$

Le résultat est le même que précédemment.

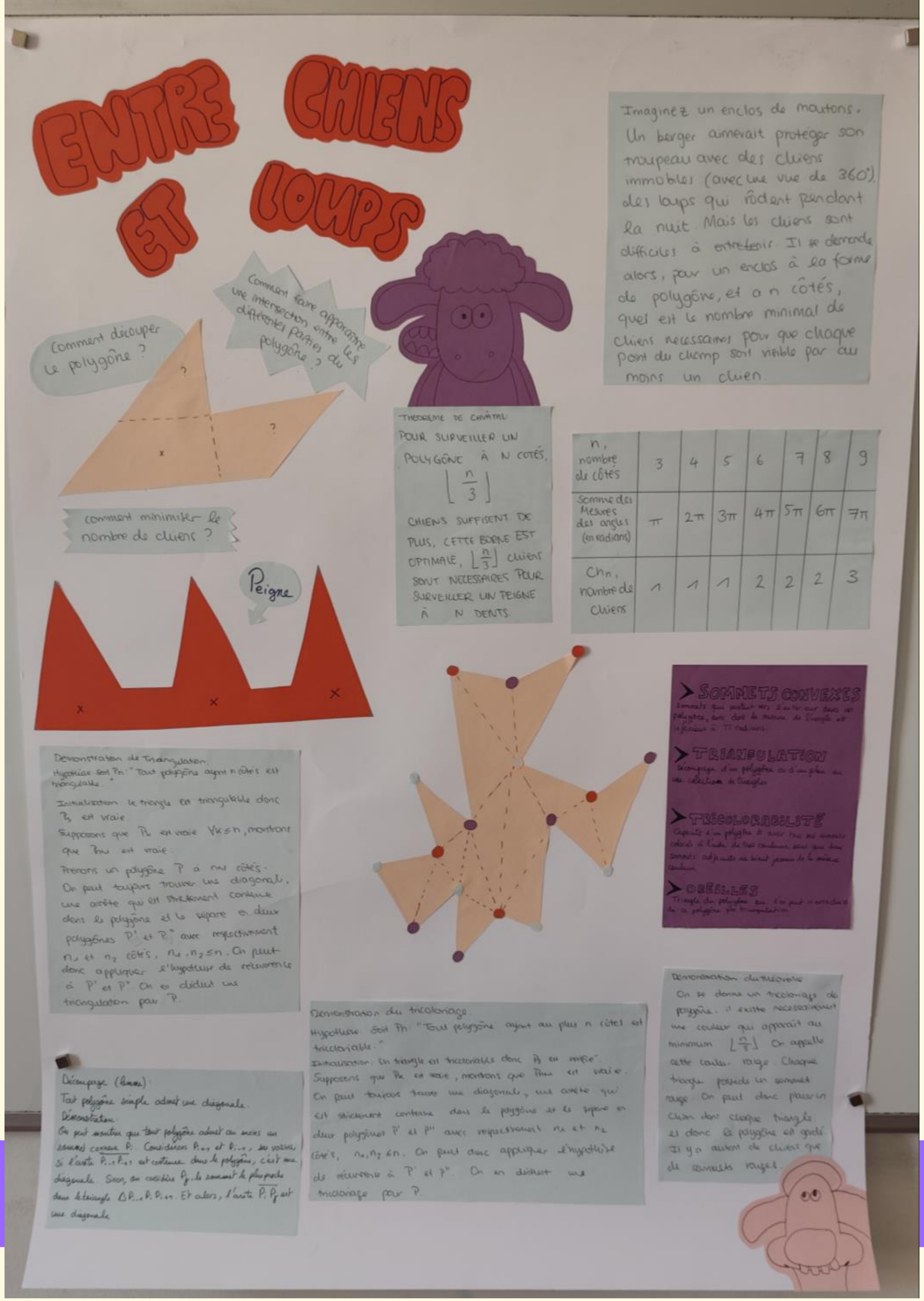
$P_{10} = 220$

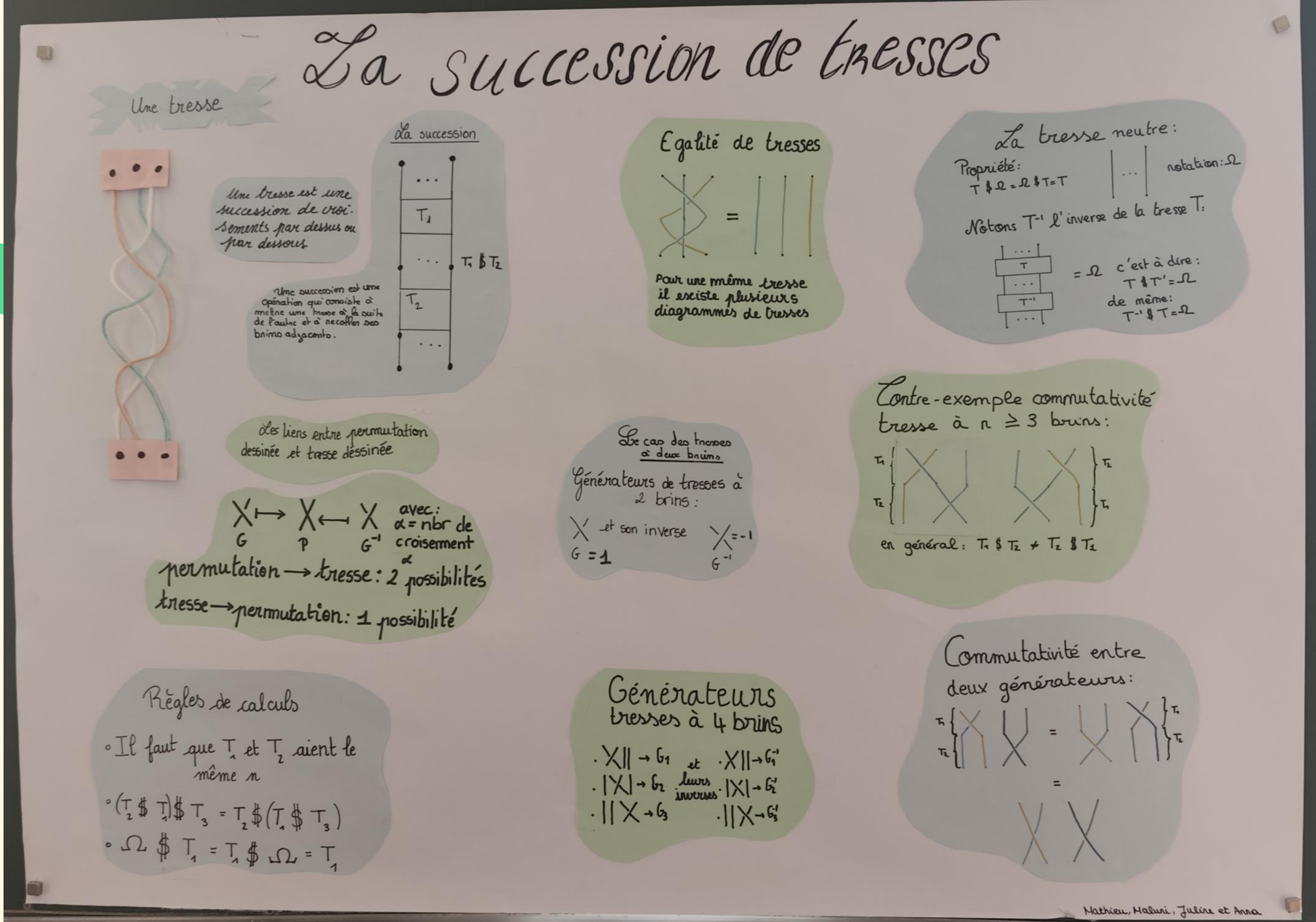
$P_{100} = 171\ 700$

⇒ Cette méthode fonctionne pour toutes pyramides à base polygonale et dans toutes les dimensions. Cependant, si l'aire de la base n'est pas totale, il n'y a pas de modélisation possible.

IRES

STAGES HIPPOCAMPE



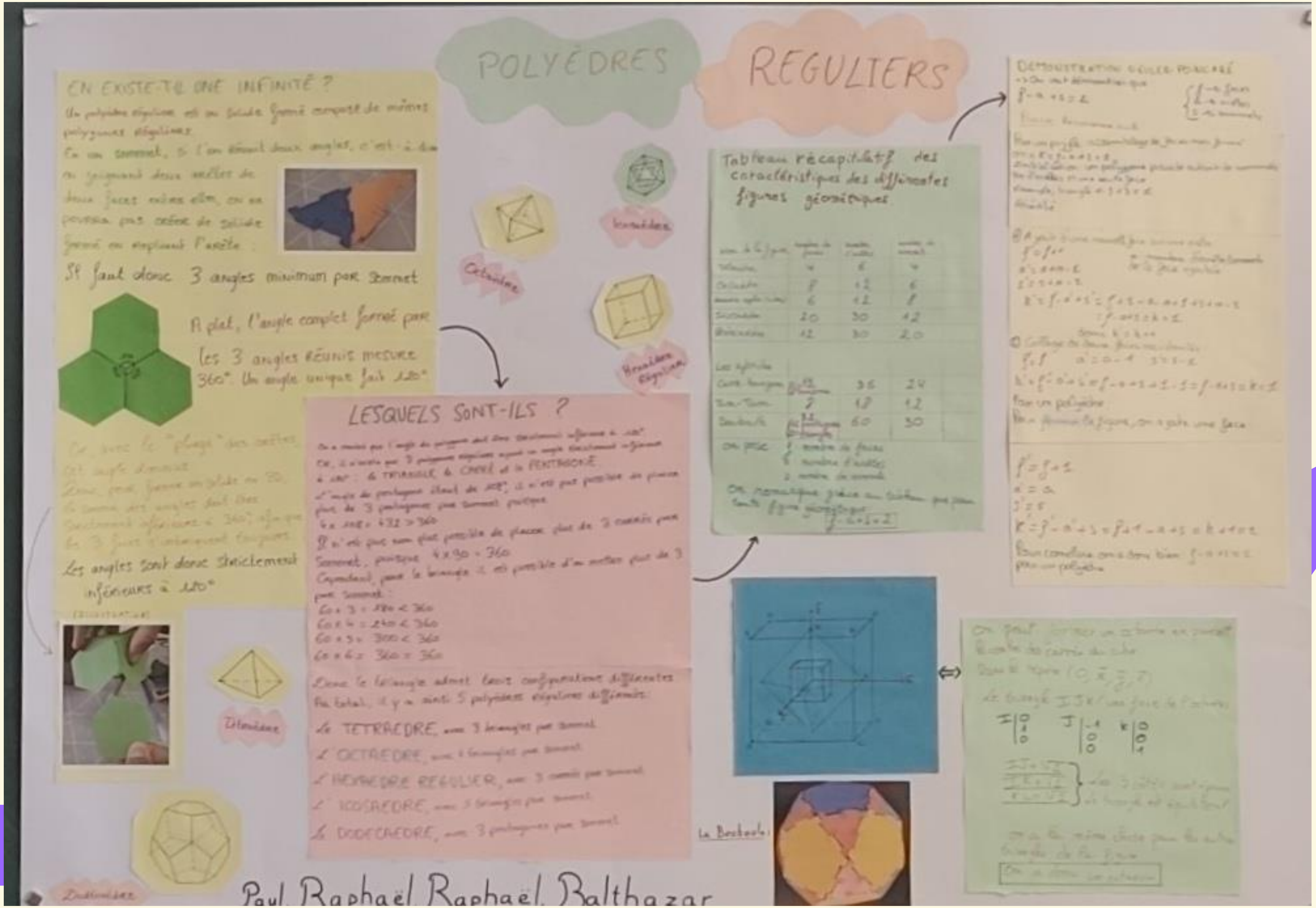


IRES

STAGES HIPPOCAMPE

IRES

STAGES HIPPOCAMPE



amU Faculté des sciences
Aix Marseille Université
Département IRES

IRES
STAGES HIPPOCAMPE

IRES
STAGES HIPPOCAMPE

amU Faculté des sciences Aix Marseille Université

Département IRES

IRES

STAGES HIPPOCAMPE

IRES

STAGES HIPPOCAMPE

amU Faculté des sciences Aix Marseille Université

Département IRES