

Stage Hippocampe

Dates : 27-28-29 Avril 2026

L'établissement : Lycée Sacré Cœur (Aix-en-Provence)

Les élèves : 29 élèves de première et terminale
(15 garçons et 14 filles)

Professeurs accompagnants :

Mme Besbas, professeure de Mathématiques

Responsable du stage :

Anne Pichon, Professeure d'université à l'I2M

Les tuteurs :

Axel Gastaldi, Doctorant à l'I2M

Rayan Oufar, Doctorant à l'I2M

Yves Lafont, Professeur d'université à l'I2M



Stage de Mathématiques

Thème du stage : « Géométrie en liberté ! »

Posters réalisés

ABONNEES AUGAZ

On cherche à alimenter trois maisons en eau, en gaz et en électricité en leur reliant chacune à deux arêtes d'alimentation. Sur des sautoirs de kitchen, on se rend apte que les tuyaux ne se croisent. Est-ce possible ? Et avec deux maisons ? Et selon ajoute un secondement au niveau Internet ?

Si on a (u, m) avec $u \leq 3$ et $m \leq 3$, tout quel est le nombre de configurations possibles qui amène à la question sans que des chemins se croisent.

d'espace étant séparé en 3, à chaque fois une des maisons ne sera pas connectée car elle ne sera pas dans le même espace que la troisième ligne. $(3,3) \times$

Si il y a une configuration (u, m) avec u et $m > 3$ alors on peut y retrouver une configuration $(3,3)$. Or elle n'est pas possible, donc la configuration (u, m) avec u et $m > 3$ n'existe pas. (u, m) avec u et $m > 3 \times$

On peut relier toutes les maisons à toutes les usines sans croisements si et seulement si u ou $m \leq 3$

Par projection orthogonale on peut projeter des points de la sphère sur un plan. On résout ainsi le problème initial : on cherche une configuration (u, m) avec u et $m > 3$ n'est pas possible.

On a un espace (u, m) avec u ou $m \leq 3$ et $(3,3)$ et $(3,4)$.
Ainsi ces configurations sont possibles.

		$(3,3) \checkmark$ $(3,4)$ ou $(4,3) \checkmark$ $(4,4) \checkmark$ $(5,3) \times$
--	--	---





Anna CATHELINÉAU
 Maxie DURAND
 Eléya NICOLAS
 Marjane RAGUENEAU
 Louise VACAISAS
 Supervisé par Rayan I^{er}

PYRAMIDES

On cherche à décorer un jardin en créant des pyramides à plat mais en volume à l'aide de boules d'argiles. Nous souhaitons savoir combien de boules faut-il pour construire une pyramide à partir d'un alignement de 40 et 100 boules. On modélise la situation avec des cubes.

Pyramides planes

Soit T_n la suite représentant le nombre de boules pour une pyramide plane de côté n .

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)$$

$$= 2T_n$$

$$2T_n = (n+1)n \Rightarrow T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

→ Somme de Gauss

GÉOMÉTRIQUEMENT

Pyramides à bases carrées

Soit D_n la suite représentant la somme des carrés de côté n .

$$D_{n+1} = D_n + (n+1)^2$$

En assemblant 3 on obtient un pavé de dimension $n \times n \times n+1$ de D_n correspondant.

$$2n = n + n+1; h = n+1$$

Donc $2D_n = n^2(n+1)$
 $D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

GÉOMÉTRIQUEMENT

Pyramides à bases triangulaires

Soit P_n la suite représentant le nombre de boules dans une pyramide à base triangulaire de côté n .

$$P_{n+1} = P_n + T_{n+1}$$

$$P_n = \sum_{k=1}^n T_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

Donc $P_n = \frac{D_n + T_n}{2}$
 $= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2}$
 $= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$

On remplace n par $n+1$:

$$T_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Dans la formule de récurrence, on remplace T_n par son expression explicite

$$T_{n+1} = (n+2) + T_n \Leftrightarrow (n+2) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+2) + n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Pour récurrence, la formule trouvée géométriquement est vérifiée.

$$T_0 = \frac{0 \times 1}{2} = 0$$

$$T_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

RÉCURRENCE

Supposons que $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que $D_{n+1} = (n+1)(n+2)(2n+3) \Leftrightarrow 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$

$$D_{n+1} = D_n + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

Pour récurrence, la formule trouvée géométriquement est vérifiée.

$$D_0 = \frac{0 \times 1 \times 2}{6} = 0$$

$$D_{100} = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338\ 350$$

RÉCURRENCE

On peut également retrouver cette formule à l'aide du pavé de Gauss en réduisant un système linéaire à 5 inconnues.

On suppose que $P_n = \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{6}$

Avec cette méthode, $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$

Le résultat est le même que précédemment.

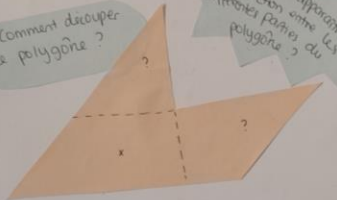
$P_0 = 0$
 $P_{100} = 171\ 300$

⇒ Cette méthode fonctionne pour toutes les pyramides à base polygonale et dans toutes les dimensions. Cependant, si l'un de la base n'est pas entier, il n'y a pas de modélisation possible.



ENTRE CHIENS ET LOUPS

Comment découper le polygone ?



Comment faire apparaître une intersection entre les différentes parties du polygone ?



Imaginez un enclos de moutons. Un berger aimerait protéger son troupeau avec des chiens immobiles (avec une vue de 360°) des loups qui rôdent pendant la nuit. Mais les chiens sont difficiles à entretenir. Il se demande alors, pour un enclos à la forme de polygone, et à n côtés, quel est le nombre minimal de chiens nécessaires pour que chaque point du champ soit visible par au moins un chien.

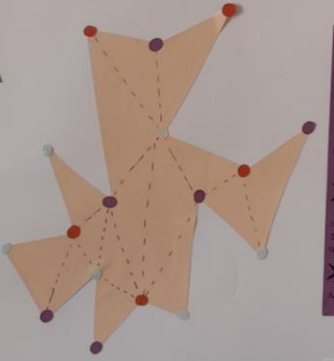
Comment minimiser le nombre de chiens ?



THESEME DE CHATRAL
POUR SURVEILLER UN POLYGONE A N COTES.
 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$
CHIENS SUFFISANT DE PLUS, CETTE BORDURE EST OPTIMALE, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ CHIENS SONT NECESSAIRES POUR SURVEILLER UN PEIGNE A N DENTS.

n, nombre de côtés	3	4	5	6	7	8	9
Somme des Mesures des angles (en radians)	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π
Chn, nombre de chiens	1	1	1	2	2	2	3

Démonstration de triangulation.
Hypothèse soit Pn "Tous polygones ayant n côtés est triangulable."
Initialisation le triangle est triangulable donc P3 est vraie.
Supposons que Pn est vraie, montrons que Pn+1 est vraie.
Prendre un polygone P à n+1 côtés. On peut toujours trouver une diagonale, une arête qui est entièrement contenue dans le polygone et le scinde en deux polygones P1 et P2 avec respectivement n1 et n2 côtés, n1, n2 < n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à P1 et P2. On en déduit une triangulation pour P.



> SOMMETTS CONVEXES
Un sommet est convexe si l'angle interne est inférieur à 180°.
> TRIANGULATION
La triangulation d'un polygone est un plan de coupe qui le divise en triangles.
> POLYGONES CONVEXES
Un polygone est convexe si pour deux points quelconques de son intérieur, le segment qui les relie est entièrement contenu dans le polygone.
> CARTELE
Un polygone est un plan de coupe qui le divise en triangles.

Découpage (suite)
Tout polygone simple admet une diagonale.
Démonstration.
On peut montrer que tout polygone admet au moins un sommet convexe B. Considérons Pn et B, on voit que si B est un sommet convexe de Pn, c'est une diagonale. Sinon, on considère Pq le sommet de plus grande distance à B. Et alors, l'arête B, Pq est une diagonale.

Démonstration de triangulation.
Hypothèse soit Pn "Tous polygones ayant au plus n côtés est triangulable."
Initialisation le triangle est triangulable donc P3 est vraie.
Supposons que Pn est vraie, montrons que Pn+1 est vraie.
On peut toujours trouver une diagonale, une arête qui est entièrement contenue dans le polygone et le scinde en deux polygones P1 et P2 avec respectivement n1 et n2 côtés, n1, n2 < n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à P1 et P2. On en déduit une triangulation pour P.

Démonstration alternative.
On se donne un recouvrement de polygones. Il existe nécessairement une couleur qui apparaît au minimum $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ fois. On appelle cette couleur rouge. Chaque triangle possède un sommet rouge. On peut donc placer un chien dans chaque triangle et donc le polygone est gardé. Il y a au moins de chiens que de sommets rouges.



La succession de tresses

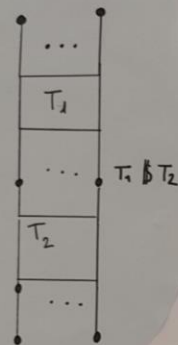
Une tresse



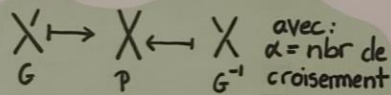
Une tresse est une succession de croisements par dessus ou par dessous.

Une succession est une opération qui consiste à mettre une tresse à la suite de l'autre et à recoller ses brins adjacents.

La succession

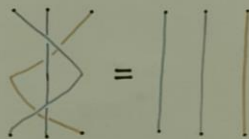


Les liens entre permutation dessinée et tresse dessinée



permutation \rightarrow tresse: 2 possibilités
tresse \rightarrow permutation: 1 possibilité

Égalité de tresses

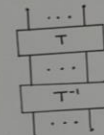


Pour une même tresse il existe plusieurs diagrammes de tresses

La tresse neutre:

Propriété: $T \circ \Omega = \Omega \circ T = T$ notation: Ω

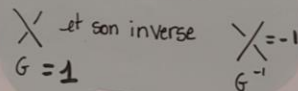
Notons T^{-1} l'inverse de la tresse T :



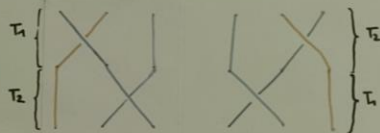
$= \Omega$ c'est à dire: $T \circ T^{-1} = \Omega$
de même: $T^{-1} \circ T = \Omega$

Le cas des tresses à deux brins

Générateurs de tresses à 2 brins:



Contre-exemple commutativité tresse à $n \geq 3$ brins:



en général: $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$

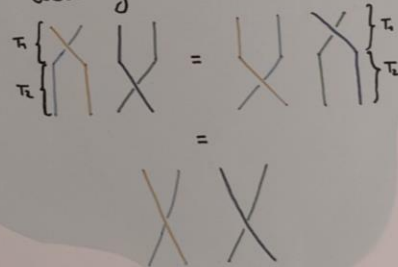
Règles de calculs

- Il faut que T_1 et T_2 aient le même n
- $(T_2 \circ T_1) \circ T_3 = T_2 \circ (T_1 \circ T_3)$
- $\Omega \circ T_1 = T_1 \circ \Omega = T_1$

Générateurs tresses à 4 brins

- $X_{12} \rightarrow b_1$ et $X_{12} \rightarrow b_1'$
- $X_{13} \rightarrow b_2$ et $X_{13} \rightarrow b_2'$
- $X_{23} \rightarrow b_3$ et $X_{23} \rightarrow b_3'$

Commutativité entre deux générateurs:





POLYÈDRES RÉGULIERS

EN EXISTE-T-IL UNE INFINITÉ ?
 Un polyèdre régulier est un solide formé composé de mêmes polygones réguliers.
 En un sommet, si l'on étend deux angles, c'est-à-dire en joignant deux arêtes de deux faces adjacentes, on se trouvera par cette arête formée en repliant l'arête.



Il faut donc 3 angles minimum par sommet.
 À plat, l'angle complet formé par les 3 angles réunis mesure 360° . Un angle unique fait 120° .



Ce, avec le "pliage" des arêtes, cet angle devient l'angle formé par deux faces adjacentes au sommet.
 Si l'angle est inférieur à 120° , on ne peut pas former un solide.
 Si l'angle est supérieur à 120° , on ne peut pas former un solide.
 Les angles sont donc strictement inférieurs à 120° .



LESQUELS SONT-ILS ?
 On a vu que l'angle de chaque arête doit être strictement inférieur à 120° .
 Or, il n'existe que 3 polygones réguliers ayant un angle strictement inférieur à 120° : le TRIANGLE, le CARRÉ et le PENTAGONE.
 L'angle de polygone étant de 108° , il n'est pas possible de placer plus de 3 polygones par sommet.
 $3 \times 108 = 324 > 360$
 Il n'est pas non plus possible de placer plus de 2 carrés par sommet, puisque $4 \times 90 = 360$.
 Cependant, pour le triangle, il est possible d'en mettre plus de 3 par sommet :
 $6 \times 60 = 360 < 360$
 $8 \times 45 = 360 < 360$
 $10 \times 36 = 360 < 360$
 Donc le triangle admet trois configurations différentes. Au total, il y a ainsi 5 polyèdres réguliers différents :
 Le TETRAÈDRE, avec 3 triangles par sommet.
 L'OCTAÈDRE, avec 4 triangles par sommet.
 L'ICOSAÈDRE RÉGULIER, avec 5 triangles par sommet.
 Le CUBE, avec 3 carrés par sommet.
 Le DODÉCAÈDRE, avec 3 pentagones par sommet.

Tableau récapitulatif des caractéristiques des différentes figures géométriques.

nom de la figure	nombre de faces	nombre d'arêtes	nombre de sommets
Tétraèdre	4	6	4
Cube	6	12	8
Octaèdre	8	12	6
Dodécaèdre	12	30	20
Icosaèdre	20	30	12

On peut aussi :

nom de la figure	nombre de faces	nombre d'arêtes	nombre de sommets
Cube tronqué	14	36	24
Tronc de cône	7	18	12
Dodécaèdre	12	30	20

On peut aussi :

- 1 nombre de faces
- nombre d'arêtes
- nombre de sommets

On remarque qu'on ne peut pas avoir plus de 3 faces par sommet.

DEMONSTRATION D'EUCLIDE - POLYÈDRES
 On a vu que l'angle de chaque arête doit être strictement inférieur à 120° .
 Or, il n'existe que 3 polygones réguliers ayant un angle strictement inférieur à 120° : le TRIANGLE, le CARRÉ et le PENTAGONE.
 L'angle de polygone étant de 108° , il n'est pas possible de placer plus de 3 polygones par sommet.
 $3 \times 108 = 324 > 360$
 Il n'est pas non plus possible de placer plus de 2 carrés par sommet, puisque $4 \times 90 = 360$.
 Cependant, pour le triangle, il est possible d'en mettre plus de 3 par sommet :
 $6 \times 60 = 360 < 360$
 $8 \times 45 = 360 < 360$
 $10 \times 36 = 360 < 360$
 Donc le triangle admet trois configurations différentes. Au total, il y a ainsi 5 polyèdres réguliers différents :
 Le TETRAÈDRE, avec 3 triangles par sommet.
 L'OCTAÈDRE, avec 4 triangles par sommet.
 L'ICOSAÈDRE RÉGULIER, avec 5 triangles par sommet.
 Le CUBE, avec 3 carrés par sommet.
 Le DODÉCAÈDRE, avec 3 pentagones par sommet.



Le Cube



On peut former un solide en joignant les arêtes de carrés de côté.
 On a vu que l'angle de chaque arête doit être strictement inférieur à 120° .
 Or, il n'existe que 3 polygones réguliers ayant un angle strictement inférieur à 120° : le TRIANGLE, le CARRÉ et le PENTAGONE.
 L'angle de polygone étant de 108° , il n'est pas possible de placer plus de 3 polygones par sommet.
 $3 \times 108 = 324 > 360$
 Il n'est pas non plus possible de placer plus de 2 carrés par sommet, puisque $4 \times 90 = 360$.
 Cependant, pour le triangle, il est possible d'en mettre plus de 3 par sommet :
 $6 \times 60 = 360 < 360$
 $8 \times 45 = 360 < 360$
 $10 \times 36 = 360 < 360$
 Donc le triangle admet trois configurations différentes. Au total, il y a ainsi 5 polyèdres réguliers différents :
 Le TETRAÈDRE, avec 3 triangles par sommet.
 L'OCTAÈDRE, avec 4 triangles par sommet.
 L'ICOSAÈDRE RÉGULIER, avec 5 triangles par sommet.
 Le CUBE, avec 3 carrés par sommet.
 Le DODÉCAÈDRE, avec 3 pentagones par sommet.

PAVAGE D'UN PLAN

LEMMES

LEMME 1
Si un polygone est pavable, sa somme des angles intérieurs est un multiple de 180° .

LEMME 2
Si un polygone est pavable, sa somme des angles intérieurs est un multiple de 360° .

LEMME 3
Si un polygone est pavable, sa somme des angles intérieurs est un multiple de 360° .

LEMME 4
Si un polygone est pavable, sa somme des angles intérieurs est un multiple de 360° .

THEOREME

Il est nécessaire et suffisant, pour pavé un plan avec la technique de renouveau, de partir d'une enveloppe de forme rectangulaire, triangulaire, ou triangle isocèle.



