Changer de paradigme pour enseigner les mathématiques : une expérimentation au sein du système

Yves Matheron et Farida Méjani
IREM d'Aix-Marseille

Résumé : La TAD qualifie l'enseignement actuel des mathématiques comme celui de « la visite d'œuvres » dont les raisons d'être, les questions auxquelles elles répondent, ont été perdues. Les mathématiques à étudier sont alors le plus souvent considérées par les élèves, voire par la société, comme gratuites, immotivées. Cet article rend compte d'une expérimentation menée pendant six ans auprès d'élèves du cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) de plusieurs collèges de la région marseillaise ; expérimentation partie prenante d'un travail d'une vingtaine d'années. Il s'agit d'enseigner les mathématiques à partir d'Activités et de Parcours d'Etude et de Recherche (AER et PER) construits par une équipe de l'IREM d'Aix-Marseille dans le cadre d'un programme national imposé. Ayant libéré pour cela certaines contraintes, dans la limite du possible au sein du système, quels effets observés sur le rapport des élèves et des professeurs à l'étude des mathématiques et à son organisation ?

Mots-clés : mathématiques, collège, étude et recherche, *topos* élargi, raisons d'être, évaluation des effets.

1. Définir la notion de paradigme en didactique

1. 1. Paradigme et contrat social

Le concept de *paradigme*, déjà présent chez les philosophes grecs pour lesquels il signifiait « modèle, exemple »[1], est depuis la fin du XX^{e} siècle attaché au nom de Thomas Khun et à son livre *La structure des révolutions scientifiques* (1983). Dans le chapitre qu'il lui consacre de son ouvrage *Qu'est-ce que la science ?*, Chalmers (1987) note « qu'un paradigme est fait d'hypothèses théoriques générales et des lois et techniques nécessaires à son application qu'adoptent les membres d'une communauté scientifique ». Autrement dit, un paradigme relève d'un consensus dans une communauté scientifique donnée à un moment donné de son développement historique, et il s'appuie sur des hypothèses plus ou moins questionnées : la séparation du temps et de l'espace dans le paradigme newtonien, l'existence de l'éther chez Maxwell, etc.

Selon certains, dont Khun lui-même, le domaine des sciences humaines résisterait à l'existence d'un paradigme compte tenu de la polysémie des concepts utilisés (*cf.* https://en.wikipedia.org/wiki/Paradigm). Il ne s'agit pas, dans ce texte, d'interroger le paradigme didactique, mais de relever que philosophes, historiens, sociologues ayant pris pour objet d'étude le domaine éducatif, notamment scolaire, s'accordent pour observer et analyser l'existence de formes scolaires certes multiples, mais dominantes dans une société déterminée à une période donnée de son histoire. Et cela même si, dans le système scolaire comme dans tout système, existent des phénomènes d'hystérésis qui voient des formes anciennes perdurer marginalement.
Parmi bien d'autres, l'ouvrage de référence d'E. Durkheim en sociologie de l'éducation, *L'évolution pédagogique en France* (1938), montre en effet, depuis l'époque gallo-romaine jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle, les liens étroits existant pour ce pays entre, d'une part,

[1] https://www.cnrtl.fr/lexicographie/Paradigme/0

changements sociaux et idées nouvelles et, d'autre part, changements de la forme scolaire. De tels changements ont pu se manifester à différents niveaux : qu'il s'agisse des disciplines et contenus enseignés (présence hégémonique puis déclin du latin et du grec au profit des mathématiques et des sciences par exemple), de l'organisation du travail d'étude des élèves (de l'écoute attentive de la parole du maître à l'étude personnelle hors sa présence), du rôle de l'enseignant (du magister à l'instituteur, du répétiteur au professeur), ou encore de l'architecture des locaux d'enseignement (de l'école cathédrale aux internats et aux salles d'étude), etc. En complément de l'analyse des programmes et instructions officielles ainsi que de leur transposition didactique, notamment à travers les manuels, mais sans négliger bien d'autres phénomènes relevant de la dépendance des systèmes scolaires au mouvement des sociétés, l'observation effective de l'enseignant, réalisée grâce aux outils mis à disposition par un cadre théorique, peut fournir indicateurs et analyseurs des formes scolaires et, partant de là, une possible explicitation du paradigme en vigueur.

De ce point de vue, le deuxième des trois cours consacrés à *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques*, donnés par Guy Brousseau lors de la VIII^{e} Ecole d'été de didactique des mathématiques en 1995, était intitulé *Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique*. Ce deuxième cours offrait une modélisation des « stratégies » observables, ou ayant été observées en théorie des situations didactiques (TSD), à l'aide de quatre grands types de *contrats* : non didactiques, faiblement didactiques et fortement didactiques portant tous deux sur un savoir nouveau, basés sur la transformation des savoirs anciens. Pour chacun de ces types de contrats étaient analysées diverses déclinaisons.

Dans la présente publication, l'article d'Yves Chevallard et Heidi Strømskag intitulé *Conditions d'une transition vers le paradigme du questionnement du monde*, reprend à son compte la notion de *contrat* pour définir le terme de *paradigme* appliqué au domaine éducatif. Celui-ci est fait de clauses « partout tacitement admises et reconnues », « bien qu'elles n'aient peut-être jamais été formellement énoncées », comme le souligne Jean-Jacques Rousseau dans son essai : *Du contrat social ou Principes du droit politique*. On retrouve en ce point l'une des caractéristiques du contrat didactique « qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer […] » (Brousseau, 1998).
Les paradigmes scolaires énoncent à leur tour les termes de l'activité éducative à laquelle ils réfèrent : « son but et ce que sont les moyens autorisés de cette activité, et par voie de conséquence, ce qui ne peut se faire sans "rompre le contrat" » (Chevallard & Strømskag, *ibidem*). Ces paradigmes, définis comme des contrats portant sur l'institution scolaire, résultent du plongement de cette dernière dans la société, la civilisation, voire l'humanité, comme l'indique, en théorie anthropologique du didactique (TAD), l'échelle des niveaux de codétermination didactique. De ce fait, les divers types de contrats didactiques se trouvent placés en interaction avec les paradigmes scolaires dont ils sont en partie dépendants.

1. 2. Quelques éléments d'un paradigme scolaire contemporain

La question qui consiste à rechercher les fondements des paradigmes scolaires, bien qu'elle soit d'un grand intérêt, n'est pas abordée dans cet article. Nous l'effleurons en nous limitant à l'observation d'éléments de paradigmes et à leur possible changement, à partir de concepts venus de la théorie didactique.

En première approche, les changements de paradigmes scolaires sont le produit d'interactions complexes où entrent notamment en jeu l'expression de ce que les sociétés pensent devoir être l'éducation des jeunes générations ; de ce qui leur semble souhaitable du comportement des élèves et des enseignants dans l'institution scolaire afin que l'étude puisse s'y déployer ; de la formation des enseignants ; de l'impact économique et social de l'existence d'une institution scolaire en terme d'investissement d'avenir ; dans cette perspective, de la détermination des œuvres devant être enseignées et de la forme prise pour cet enseignement, etc.

Malgré des phases de résistance, l'adhésion à un paradigme éducatif donné assure le bon fonctionnement de cette partie du contrat social relatif à l'éducation et, par conséquent, le bon fonctionnement de l'institution vers laquelle il est dirigé : l'École. En retour, cette adhésion apparaît naturelle à la société qui peut la justifier à partir de diverses considérations : âge et capacités supposées des élèves, évolution des attentes sociales en matière de scolarisation, évolution des savoirs, discours sur l'apprentissage, etc. Donnons deux exemples de tels déterminants d'un paradigme scolaire actuel, partie prenante d'une liste non exhaustive qui resterait, quant à elle, à établir.

D'une part, les *discours* – autrement dit les dimensions technologico-théoriques relatives à certains des éléments du paradigme didactique – portant sur ce que doit être la place de l'activité plus ou moins personnelle de l'élève dans l'étude, par exemple les idées issues du courant dit de « l'Éducation nouvelle », de ses prolongements et interprétations, indiquent l'une des orientations à donner à la forme de l'étude : en privilégiant l'activité de l'élève à l'aide de textes précisément intitulés *activités*, censés promouvoir une amélioration de l'apprentissage des mathématiques au programme.

D'autre part, les évaluations internationales (PISA, TIMSS) et les classements et informations qu'elles fournissent, notamment sur les coûts et « rendements » comparés des systèmes éducatifs, contribuent à orienter la forme que doivent ou non prendre les paradigmes scolaires. Les contenus qui composent les textes de ces évaluations contribuent eux-aussi à orienter certaines des attentes en termes de connaissances mathématiques des élèves à des âges donnés (10 ans, 15 ans, 18 ans). Ces évaluations indiquent ainsi en retour, et de manière plus ou moins implicite, les organisations mathématiques dont on doit privilégier l'enseignement et celles que l'on doit abandonner, parce que considérées désuètes ou de peu d'intérêt social. On observe ainsi en France, dans le programme du second degré, une part décroissante consacrée à la géométrie au profit de la statistique et de l'algorithmique. Ce déclin s'accompagne de celui de la place de la démonstration au Collège (élèves de 11 à 15 ans).

1. 3. Le paradigme scolaire dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des activités

Y. Chevallard et H. Strømskag, dans l'article que l'on trouvera dans cette même publication, définissent deux grands types de paradigmes : celui de « la visite des œuvres », noté P_1, et celui, P_2, « du questionnement du monde ». Au sein du système éducatif français, quelques tentatives d'implantation de dispositifs favorisant l'émergence de ce dernier paradigme ont été impulsées au tournant des années 2000. On pourra relever à ce titre, et pour les élèves du cycle terminal des lycées (élèves de 16 à 18 ans), le dispositif des Travaux Personnels Encadrées (TPE). A partir de grands thèmes nationaux, des groupes d'élèves d'une classe construisent une question, deux heures par semaine et pendant un semestre, puis ils enquêtent afin de lui apporter une réponse. Ainsi, sur l'exemple du thème portant sur les « risques naturels et technologiques », ces groupes d'élèves pourraient proposer les questions suivantes pour lesquelles ils s'engageraient dans la recherche de réponses : Y a-t-il un risque à manger des aliments issus d'une agriculture utilisant des nitrates ? Sommes-nous à l'abri d'un choc céleste ? Dans le cas de l'accident d'une centrale nucléaire, en combien de temps la propagation d'un nuage radioactif atteindrait-il une ville donnée et que faire alors, etc. ?

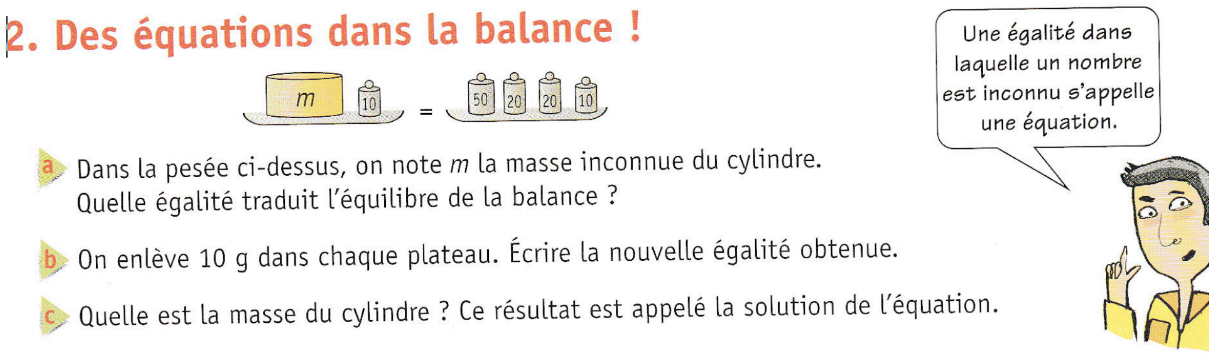
L'engagement dans l'enquête diffère, comme on le voit, de l'étude d'éléments d'un programme prédéfini, autrement dit d'un enseignement finalisé par l'existence d'un programme à suivre, même si certaines œuvres, notamment mathématiques, qui peuvent ou non y figurer, devront être étudiées afin de construire une ou des réponses à ces questions.

Y. Chevallard et H. Strømskag mentionnent certaines des déclinaisons du paradigme P_1 de la visite des œuvres. Nous retenons ici l'exposé de quelques-unes d'entre elles afin de préciser par la suite le cadre dans lequel a pris place l'expérimentation décrite dans cet article. A la forme la plus fruste du paradigme de la visite des œuvres, celle pour laquelle la raison d'étudier une œuvre ne tient qu'à l'importance accordée à l'œuvre elle-même, a pu succéder celle où l'exposé de l'œuvre, ou plutôt d'une partie de celle-ci, s'accompagne d'applications ou d'exemples ; ceux-ci sont supposés fournir à l'élève de possibles raisons d'être de l'œuvre. Une variante de cette forme engage les élèves dans les exercices qui suivent l'exposé et contribuent à une étude les impliquant davantage.

Enfin, au tournant des années 1970-1980 est apparue, notamment en France, une forme nouvelle qui se caractérise par un changement de l'organisation jusqu'alors traditionnelle de l'enseignement scolaire des mathématiques – un cours suivi d'exercices –, au profit « d'activités ». Elles engagent les élèves en signant le démarrage de l'étude de la nouvelle notion visée. Ainsi, le programme français du Collège (élèves de 11 à 15 ans), édité en « Supplément au Bulletin Officiel n° 44 du 12 décembre 1985 », mentionne-t-il p. 80, dans sa partie consacrée aux mathématiques : « Dès lors, les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. […] Les *activités [souligné par nous]* choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. »

Il y a loin des intentions de programme à la réalité des classes. L'examen des textes « d'activités » trouvées dans les manuels scolaires montre que le « problème », pour reprendre le terme utilisé dans le programme de 1985, est souvent de peu d'épaisseur mathématique. L'activité de l'élève est réduite à formuler des réponses banales à des questions qui le sont tout autant et manquent en grande partie l'étude de la notion visée.

« L'activité 2 », trouvée dans un manuel scolaire en usage pour des élèves de 4^e (élèves de 13 à 14 ans), servira ci-dessous d'exemple. Elle est censée introduire à l'étude, nouvelle, des équations du 1er degré à une inconnue qui figure au programme de cette classe.


2. Des équations dans la balance !

a Dans la pesée ci-dessus, on note m la masse inconnue du cylindre. Quelle égalité traduit l'équilibre de la balance ?

b On enlève 10 g dans chaque plateau. Écrire la nouvelle égalité obtenue.

c Quelle est la masse du cylindre ? Ce résultat est appelé la solution de l'équation.

Une égalité dans laquelle un nombre est inconnu s'appelle une équation.

La progression des élèves vers la réponse se décline à travers les questions *a* et *b* auxquelles ils doivent répondre en écrivant respectivement $m + 10 = 50 + 20 + 20 + 10$, ou encore $m + 10 = 100$, soit enfin $m = 90$ puisqu'on enlève 10 g à chaque plateau comme le demande la

question b[2]. La réponse à la question c va alors de soi puisque la question b la fournit aux élèves.
Ils sont ainsi conduits, à partir de questions triviales leur soufflant des réponses partielles, vers la réponse à la question qui devrait pourtant être constitutive du problème, mais qu'ils ne rencontrent qu'à la fin, dans la question c. Contrairement aux préconisations du programme de 1985 citées plus haut, « la situation », si tant est qu'elle en soit une, ne « crée aucun problème ». Qu'ont appris les élèves ? Ils n'ont guère travaillé que des techniques étudiées dans les premières classes de l'école primaire, vers 6-8 ans : additionner des entiers ($50 + 20 + 20 + 10 = 100$) et recourir à la définition de la différence de deux nombres ($m + 10 = 100$ signifie que m est la différence entre 10 et 100, soit 90). Seule l'écriture littérale recourant à la lettre m, nécessitée par la mise en équation mais donnée par l'énoncé sans que vive une nécessité mathématique pour les élèves, semble nouvelle. L'étude des équations aurait pourtant supposé que l'on s'affronte à divers spécimens de l'équation générale $ax + b = c$ avec a, b et c entiers ou rationnels non entiers, en donnant par exemple pour cela diverses valeurs aux paramètres a, b et c, ainsi qu'aux équations s'y ramenant[3].

Cette « activité » engage les élèves dans des réponses à des questions enchaînées, constitutives d'autant d'étapes auxquelles ils se soumettent sans qu'ils aient eu la possibilité de les établir comme des nécessités au sein d'un processus de recherche ; qui plus est, sans que la finalité de l'activité leur apparaisse autrement qu'après-coup, pour ceux qui savent mettre en rapport la dernière question avec le travail qui leur a été précédemment demandé. Le professeur peut alors déclarer que les élèves sont parvenus à trouver la solution d'une équation, comme l'indiquent le dessin représentant le professeur et la deuxième phrase de la question c, « ce résultat est appelé solution de l'équation ».

Les étapes de la résolution de l'équation $m + 10 = 100$ ont été partiellement montrées en s'appuyant pour cela sur des rapports à des techniques et technologies étudiées à l'école primaire[4], mais en faisant vivre l'illusion d'une production concernant les équations, issue du travail des élèves. Les auteurs de l'activité recourent ainsi à la technique didactique dite de « l'effet Jourdain ». Il est possible que le professeur demande, à la suite de cette « activité », de consigner les techniques associées au type de tâches « résoudre une équation », institutionnellement attendues à ce niveau et que les élèves auront à apprendre, bien que « l'activité » ne leur ait pas permis de les rencontrer.

Cette manière de faire relève d'un enseignement à propos duquel la raison d'être de la notion d'équation risque fort d'échapper aux élèves, mais au cours duquel « on leur montre » la réponse en laissant vivre l'idée qu'ils l'ont trouvée par eux-mêmes. C'est la raison pour laquelle Berthelot et Salin (1992) ont désigné cette forme d'enseignement du terme *d'ostension déguisée* : on montre en masquant que l'on montre, à travers divers déguisements du savoir. De tels exemples « d'activités » concernent quasiment toutes celles proposées par

---

[2] Il n'est généralement pas attendu des élèves français que soit écrite une égalité dans laquelle figurerait la grandeur comme dans : $m + 10$ g = 50 g + 20 g + 20 g + 10 g.
[3] Le programme actuel de ce niveau du cursus (13-14 ans) indique les connaissances sur les équations attendues des élèves en fin d'année. Elles sont relatives aux techniques associées aux types de tâches « tester une solution d'équation » et « résoudre une équation » :
« • 4 est-il solution des équations suivantes ?
$3x + 2 = 8$; $5x - 6 = 3x + 2$; $x^2 - 9 = 3x - 5$; $\frac{x-1}{12} = \frac{1}{4}$
• Il *[l'élève]* résout les équations du type : $4x + 2 = 0$; $5x - 7 = 3$; $2x + 5 = -x - 4$ »
[4] Notons que la résolution de $ax = b$, $a \neq 0$, s'appuyant sur la définition du quotient, n'est pas sollicitée dans cette activité ; il en est de même, par exemple, de la technique de « transposition » d'un terme d'un membre à l'autre de l'équation.

les manuels scolaires. On retrouve leur usage par les professeurs dans les classes que l'on observe, comme une signature du paradigme didactique de la visite des œuvres – visite le plus souvent très sommaire comme sur l'exemple de cette « activité » –, en vigueur dans l'enseignement des mathématiques, de l'école primaire à la fin du secondaire.

2. Conditions et contraintes pour une modification locale vers la variante P_1^{+++} du paradigme P_1

2. 1. Le Modèle Praxéologique de Référence (MPR) dans la chaîne de transposition didactique pour un PER finalisé

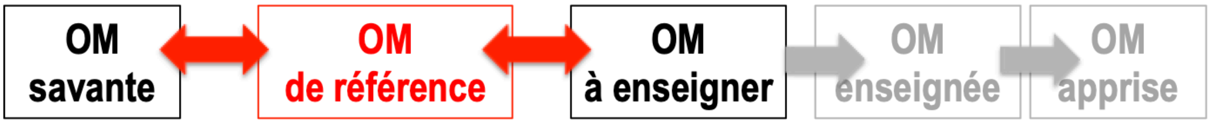
Dans l'article de Yves Chevallard et H. Strømskag précité, la pointe la plus avancée du paradigme de la visite des œuvres est constituée d'une dernière variante notée P_1^{+++}. P_1^{+++} « conduit à mettre en avant l'étude d'une question *q* d'un certain type *Q*, question à laquelle la réponse *r* élaborée par la classe sous des conditions et contraintes déterminées repose essentiellement sur le recours à l'œuvre *o* – ce qui montrera que *o* "sert" à répondre à des questions du type *Q*. »

Concevoir des propositions engageant les élèves dans l'étude d'une œuvre *o* d'un programme à partir d'une recherche qui leur est dévolue, soit donc des propositions s'inscrivant dans le paradigme P_1^{+++}, nécessite une enquête préalable portant sur l'œuvre *o*. Etudier les questions « À quelle(s) question(s) répond l'œuvre *o* ? » et « Que sont les réponses à ces questions ? » constitue des passages obligés. En effet, on souhaite à la fois pouvoir transposer au moins l'une des questions à l'origine de l'œuvre *o*, et que cette question, dévolue aux élèves, soit génératrice d'étude et de recherche. Cette dernière doit aboutir à ce qu'une œuvre ω*, nourrissant une proximité avec l'œuvre *o* ou avec une partie de *o*, ait effectivement été (re)produite sous la responsabilité des élèves comme réponse à cette question.

Une fois réalisée l'enquête sur l'œuvre *o*, se pose une nouvelle série de questions au concepteur d'une activité d'étude et de recherche (AER) ou d'un parcours d'étude et de recherche (PER)[5]. Parmi celles-ci, quel degré d'éloignement ou de proximité l'œuvre ω*, produite ultérieurement par la classe en réponse à une question *q** dévolue, entretient-elle avec l'œuvre *o* du domaine du savoir savant ?

Dans la chaîne modélisant la transposition didactique, une étape supplémentaire devient nécessaire. Elle a pour fonction l'élaboration d'un Modèle Praxéologique de Référence (MPR) qui, dans le cas des mathématiques, devient une Organisation Mathématique de Référence (OMR) et joue un rôle de vigilance épistémologique relativement à *o* (*cf.* Chevallard, 1985, édition de 1991). L'OMR prend place entre l'enquête sur l'œuvre *o* et la définition de ce que sera l'œuvre ω à enseigner. C'est ce que montre le schéma ci-dessous dans lequel, d'une part, les conditions ou les choix portant sur l'OM savante et, d'autre part, les contraintes, venues d'une nécessaire insertion du PER dans un programme national, se trouvent en surplomb et ne sont pas représentées en tant que telles. Les doubles flèches indiquent les interactions réciproques entre d'une part OMR et OM savante et, d'autre part, entre OMR et OM à enseigner, c'est-à-dire, pour cette dernière, constitutive du PER a priori.

[5] Pour une AER, une organisation mathématique locale, c'est-à-dire un thème et, pour un PER, une organisation mathématique régionale, c'est-à-dire un secteur ou une partie d'un secteur mathématique.



o *o** ω ω*

L'OM de référence, constituant l'œuvre *o**, est ainsi faite d'un ensemble de réponses, parfois partielles, à des questions telles que celles-ci : « que conserver des questions ayant engendré les réponses constitutives de *o* et que conserver de *o* ? » ; « comment transformer sans dénaturer ? » ; « de quelles contraintes tenir compte, qui relèvent à la fois de la partie du curriculum à enseigner et du curriculum antérieurement offert aux élèves ? » ; etc. Pour chaque étape de la transposition didactique, vivent alors des organisations mathématiques différentes qui, entre elles, entretiennent des degrés de proximité et d'éloignement relatifs : une œuvre *o* pour l'OM savante, une œuvre *o** pour l'OM de référence, une œuvre ω pour l'OM visée comme étant à étudier et constitutive du texte du PER, une œuvre ω* pour l'OM qui sera effectivement construite à l'issue du processus d'étude et de recherche.

Deux exemples, issus des PER que nous avons élaborés, permettront d'illustrer les propos précédents.

Le premier concerne une AER sur les équations, partie prenante d'un PER plus large sur l'algèbre élémentaire pour des élèves de Collège, âgés de 12 à 15 ans. L'entrée choisie en TAD, s'appuyant sur l'une des raisons d'être ayant historiquement conduit à l'élaboration de l'algèbre élémentaire, reprise par exemple par Clairaut dans ses *Élémens d'algèbre* (1746), considère celle-ci comme modélisation permettant d'effectuer des calculs sur des programmes de calcul ; soit donc l'œuvre *o*. Ce choix permet de définir une partie d'un modèle praxéologique, ou organisation mathématique de référence pour l'algèbre élémentaire qui, à son tour, permet d'élaborer l'organisation mathématique constitutive d'un PER sur l'algèbre à ce niveau du cursus.
Ainsi fera-t-on éprouver par les élèves la nécessité d'une modélisation des programmes de calcul sur lesquels ils travaillent, grâce à des variables, paramètres et inconnues, afin de répondre à des questions comme celles-ci : comment peut-on savoir si deux programmes de calcul sont ou non équivalents et, s'ils ne le sont pas, peut-on trouver une valeur pour laquelle ils rendront le même résultat, etc. ? Cette dernière question aboutit à l'étude des équations, limitée à celles du 1er degré à une inconnue pour ce niveau du cursus.
Une nouvelle question advient qui nourrit une autre partie de l'OMR, c'est-à-dire l'œuvre *o**. Elle émerge de l'étude du curriculum institutionnellement offert. Il est nécessaire d'analyser sur quelles parties antécédentes du curriculum ont pu se construire des rapports personnels d'élèves. Ils serviront de points d'appui afin que la question dévolue à la classe leur permette de se lancer dans la recherche et de proposer une ébauche d'OM pour la résolution d'une équation : par exemple, une question importante portant sur les rapports personnels des élèves concerne leur rapport à l'égalité.
Il est aussi nécessaire, pour la partie du curriculum qui est visée, de définir les contours et les limites de l'organisation mathématique associée au type de tâches « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue » telle que l'entend le programme. Fera-t-on étudier des équations avec ou sans paramètres, en évitant ou non les équations impossibles ou indéterminées, avec ou sans « l'inconnue figurant au dénominateur », c'est-à-dire en rencontrant ou non des fractions rationnelles, etc. ?
Les réponses aux questions définissant le MPR dans le cas général, et l'OMR dans le cas particulier des mathématiques, conditionnent les choix portant sur l'OM constitutive de l'AER ou du PER, désignée dans le schéma précédent comme étant l'OM à enseigner.

Par exemple, une partie des rapports des élèves antérieurement construits lie, au niveau technologique, l'égalité entre deux nombres au fait que leur différence soit nulle : $(a = b) \Leftrightarrow (a - b = 0)$. On s'appuie sur ce rapport afin de lancer la recherche sur le nombre x_0, éventuelle solution d'une équation du type $ax + b = cx + d$, à partir de la recherche d'un nombre, s'il existe, annulant la différence entre les binômes $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$. Cette technique, associée à d'autres éléments technologiques disponibles chez les élèves – les définitions de la différence et du quotient – a l'avantage de pouvoir construire à son tour un élément technologique justifiant la technique de résolution d'une équation ; soit donc l'œuvre ω. L'observation des classes travaillant sur cette AER, partie d'un PER sur l'algèbre élémentaire, permet d'analyser l'œuvre ω* qui a été construite et d'évaluer son degré de proximité avec l'œuvre ω. Pour plus de détails sur ce PER voir Matheron (2018)[6].

Le second exemple, que nous ne détaillerons pas, concerne un PER portant sur la partie du curriculum relative aux isométries affines planes – curriculum restreint dans le programme actuel en France à quelques éléments d'OM portant sur la symétrie centrale, la translation et la rotation, la symétrie glissée n'étant pas au programme – et aux cas d'égalité des triangles.
Nous choisissons parmi d'autres OM possibles, une organisation mathématique savante *o*, qui définit l'ensemble des isométries d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n comme le groupe orthogonal $O(E)$ engendré par les involutions ($f^2 = \mathrm{Id}_E$) du groupe linéaire $GL(E)$ de E pour lesquelles deux sous-espaces propres V et $V^\perp$ sont orthogonaux ; dans ce cas les involutions sont dites symétries orthogonales par rapport à V. Par conséquent une isométrie conserve la norme. Une isométrie d'un espace affine euclidien dirigé par un espace vectoriel euclidien est une application de cet espace affine dans lui-même telle que l'application linéaire associée appartienne à $O(E)$. Ainsi les isométries affines forment un groupe engendré par les symétries orthogonales.

S'appuyer sur ces définitions et propriétés permet de construire une OMR *o** pour un PER sur cette partie du programme. On définira de cette manière les trois nouvelles isométries affines planes du programme comme étant engendrées par les symétries orthogonales à propos desquelles un rapport évolutif, et de longue date, a été établi chez les élèves depuis l'école primaire. Les cas d'égalité des triangles résultent alors de la possibilité ou non, étant donnés deux triangles définis à partir de certaines de leurs caractéristiques, angles et longueurs des côtés, de trouver une isométrie qui envoie l'un sur l'autre. On construit ainsi une OM à enseigner, soit une œuvre ω.

2. 2. Faire vivre, dans le système actuel, des PER finalisés ; quelques conditions depuis la didactique des mathématiques

De 2006 à 2018, à l'initiative de commission inter-IREM de Didactique et avec des moyens en heures et en postes venus de l'Institut National de Recherche Pédagogique (INRP) devenu par la suite Institut Français de l'Education (IFE), a été lancé en France le réseau qui a pris pour nom PERMES, pour Parcours d'Etude et de Recherche en Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire. Il s'agissait de se démarquer localement d'un enseignement inséré dans le paradigme de la visite des œuvres sous la déclinaison de l'ostension déguisée, comme le montre l'activité prototypique décrite en 1. 3. L'un des objectifs assignés au réseau visait une possible amélioration de l'apprentissage des élèves en mathématiques ; celui-ci étant évalué à la baisse par diverses évaluations nationales et internationales.

[6] Article publié dans la revue *Petit x* n° 108 : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-108-petit-x/3-elements-d-un-parcours-d-etude-et-de-recherche-pour-enseigner-l-algebre-au-cycle-4-571673.kjsp?RH=1550186395537

Au sein des équipes PERMES, il fallait produire des propositions d'enseignement bâties sur l'étude par la recherche pour certaines des notions aux programmes du second degré, collèges et lycées d'enseignement général, puis les faire passer dans les classes des professeurs du réseau.
Suivant la variante P_1^{+++} du paradigme de la visite des œuvres, variante qui paraît indépassable du fait de l'existence d'un programme national de mathématiques que doivent impérativement suivre les professeurs, ces propositions avaient en commun de vouloir organiser la confrontation des élèves à une tâche mathématique problématique dont la résolution produit le savoir au programme ; le travail de recherche pouvant se poursuivre hors classe. Les élèves devenant en grande partie responsables de la production de réponses sous la direction du professeur, la classe s'apparente alors à une petite communauté de chercheurs qui étudient, de cette manière, des œuvres mathématiques du programme.

Une importante condition à mettre en place tient à la fois à l'existence d'un milieu sur lequel les élèves agissent et qui agit sur eux, lui-même contraint par les équipements cognitifs et praxéologiques dont ils disposent en situation, *hic et nunc* ; ce que l'un d'entre nous a antérieurement désigné du terme de *mémoire pratique* (Matheron, 2001). Une autre condition porte sur la topogénèse, soit la place du professeur et des élèves dans l'étude, contrainte par le poids des contrats didactiques prévalant et des habitudes professorales. Autrement dit, il s'agissait d'analyser et de décider des degrés de didacticité et d'adidacticité des situations dans lesquelles travailleraient les élèves. Pour cela, les choix nécessaires ne pouvaient guère être faits, dans un premier temps, qu'a priori. Les observations que nous avons pu ensuite mener ont conduit à des analyses a posteriori, à des retouches de nos propositions initiales et à la prise d'informations sur le fonctionnement de tels systèmes didactiques.

Une hypothèse a consisté à considérer que pour une praxéologie $\wp$, partie prenante d'un curriculum antérieurement offert, il existait, dans une classe donnée et après étude de cette praxéologie, au moins un élève – de fait, beaucoup plus – dont l'équipement praxéologique, issu de son curriculum personnellement vécu, coïncidait en partie avec l'équipement praxéologique antérieurement offert par l'instance $\hat{\imath}$ responsable de cet enseignement. Par exemple, voulant enseigner le théorème de Thalès, on suppose qu'il existe, dans une classe donnée, au moins un élève dont l'équipement praxéologique portant sur les praxéologies $\wp$ relatives aux rapports et à la proportionnalité, coïncide avec celui contenu dans les parties du curriculum antérieurement offertes à propos de $\wp$.

Une telle hypothèse semble banale car c'est en réalité une clause tacite propre à tout contrat didactique : les élèves et les professeurs sont supposés pouvoir s'appuyer sur des connaissances anciennes afin qu'en soient enseignées de nouvelles en direction de ceux qui les ignorent encore. La différence tient, dans le cas de P_1^{+++}, à la possibilité d'un engagement de la classe de nature adidactique dans l'étude de la question qui lui est dévolue. Autrement dit elle tient à la possibilité d'une réussite effective de l'étude de la ou des questions engendrant la praxéologie du curriculum qui est visée, parce que cet équipement praxéologique fera partie du milieu que construiront les élèves. Cela à l'opposé de l'ordinaire d'une classe, dans le cas des autres variantes de P_1, pour lesquelles le professeur prendrait en charge l'exposition de ce théorème, en présupposant l'existence d'un équipement praxéologique idoine chez les élèves afin qu'ils puissent seulement « suivre son cours ». Dans certains cas, l'existence d'un tel équipement praxéologique permet aux élèves l'avancée dans la recherche de questions inédites à partir du « moteur topogénétique » constitué *d'extensions praxémiques*.

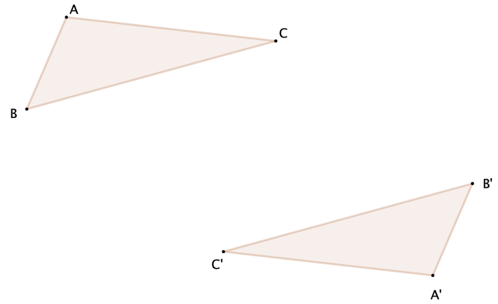
2. 3. Favoriser les extensions praxémiques chez les élèves afin qu'ils construisent les OM visées

Il s'agit, disposant d'un équipement praxéologique relatif à une praxéologie $\wp_1$ minimalement représentée par $[T_1, \tau_1, \theta_1, \Theta_1]$, d'utiliser τ_1 pour une praxéologie $\wp_2$ en cours de construction, afin de répondre à une tâche problématique t_2 de $\wp_2$, sans pour autant s'être préoccupé de la validation ou de l'invalidation de l'extension d'usage qui pourrait être postérieurement conférée par un bloc technologico-théorique $[\theta_2, \Theta_2]$ encore à venir.

L'histoire des mathématiques fournit des exemples d'extensions praxémiques productrices de savoir nouveau : Newton utilisant les opérations arithmétiques pour obtenir des développements en série, Leibniz utilisant les travaux de Pascal sur les tangentes au quart de cercle et les triangles assignables et inassignables pour les tangentes aux courbes, Lagrange et l'algébrisation du calcul différentiel et intégral à partir des développements en série, etc. Il en va de même des pratiques d'élèves qui peuvent conduire vers des tentatives d'extension plus ou moins heureuses. Par exemple, disposant d'un équipement praxéologique contenant la technique de calcul du produit des racines carrées, justifiée par l'élément technologique $\sqrt{a \times b} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|}$ en veillant à la nécessité de valeurs absolues, certains élèves s'autorisent, plus loin dans leur cursus personnel, une extension d'usage à $\ln(a \times b) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$ alors que l'élément technologico-théorique « homomorphisme de groupe » n'est pas enseigné dans le curriculum français[7]. Il s'agit, sur cet exemple, d'une extension praxémique s'appuyant sur des écritures ostensives. Aussi avons-nous, lorsque cela était possible, conçu des propositions d'enseignement dont les contenus favorisaient le recours aux extensions praxémiques par les élèves. L'exemple qui suit montre une possible extension praxémique que nous sollicitons pour l'enseignement des isométries planes au programme du Collège.

La majorité des élèves de la deuxième classe de ce cursus (élèves de 12 à 13 ans) disposent, depuis l'école primaire, d'un certain équipement praxéologique relatif à la symétrie orthogonale. Il contient notamment un lien entre de cette symétrie et le pliage autour d'une droite. Cet équipement s'enrichit, depuis la première classe du Collège (élèves de 11 à 12 ans), de certaines organisations mathématiques ponctuelles : notamment, parmi celles-ci, d'éléments technologiques portant sur les propriétés de conservation. On s'appuie sur cet équipement praxéologique pour demander aux élèves s'il est possible, comme dans la figure ci-dessous, de passer par pliage du triangle *ABC* au triangle *A'B'C'*.

[7] Ils s'autorisent aussi à dire que pouvant simplifier par $a \neq 0$ dans le produit $ab = ac$, alors on peut « simplifier par ln » dans l'égalité $\ln a = \ln b$!



Les élèves « voient des ressemblances » entre ces deux triangles et tentent de dessiner un possible axe de symétrie qui permettrait d'envoyer par pliage le triangle *ABC* sur le triangle *A'B'C'*. Ces tentatives aboutissent à constater que si, par exemple, on parvient ainsi à envoyer *A* en *A'*, il n'en est pas de même des autres sommets. L'extension praxémique advient lorsque les élèves recherchent une deuxième symétrie, puisqu'une seule ne suffit pas, mais qu'ils disposent d'un rapport, établi le plus souvent à l'extérieur de la classe de mathématiques, qui consiste à plier une feuille en quatre. Ils procèdent alors par essais et erreurs conduisant à des ajustements, observant les changements d'orientation, le parallélisme des segments, etc.
La disposition des axes, lorsque le résultat de la recherche a été validé par deux pliages successifs, diffère d'un groupe d'élèves à l'autre, mais tous remarquent qu'ils sont perpendiculaires en le même point. On lance alors l'étude qui justifiera et expliquera cet « étrange phénomène ». La même technique peut être répétée pour les deux autres isométries du programme – la translation et la rotation –, à partir de la disposition de triangles donnée a priori. Mais, réciproquement, on peut aussi continuer l'exploration par pliage, autrement dit par composition des symétries orthogonales, en se demandant ce qu'il advient d'un triangle lorsqu'on plie consécutivement deux fois, dans les cas où les axes sont sécants non perpendiculaires ou parallèles. On recourra de même à d'autres extensions praxémiques pour d'autres notions du programme, par exemple pour s'autoriser à passer des opérateurs additifs-soustractifs aux nombres relatifs et à leurs opérations, « parce qu'on peut faire un peu avec ces opérateurs comme on fait avec les nombres entiers ou décimaux que l'on connaît » (*cf.* Matheron, 2018).

2. 4. Contraintes systémiques pour des PER finalisés

Nos propositions s'inscrivent donc au sein du paradigme 1, l'étude étant finalisée par l'enseignement d'un programme national institutionnellement imposé ; ce qui relève d'une contrainte importante bloquant l'entrée dans le paradigme 2 de questionnement du monde. Cependant et comme on l'a dit, l'hypothèse portant sur une possible mobilisation par les élèves d'équipements praxéologiques coïncidant avec ceux étudiés dans les curriculums antérieurement offerts, permet de disposer de conditions pour un élargissent du *topos* des élèves, et offre la possibilité d'une adidacticité plus importante.

Reprenant l'exemple qui précède, les questions à l'origine de l'étude – comment envoyer une figure sur une autre par isométrie, les deux étant données et, réciproquement, que devient l'image d'une figure par isométrie ? – initient l'étude non pas d'un seul thème, celui de la symétrie centrale, mais d'un secteur de la géométrie plane : celui des isométries et des cas d'égalité des triangles, voire au-delà, celui des similitudes lorsqu'adviendront le théorème de

Thalès et l'homothétie. Il s'agit non plus de questions engendrant seulement une activité d'étude et de recherche (AER), mais plus largement un parcours d'étude et de recherche (PER). Les réponses aux questions initiales débouchent en effet, à leur tour, sur de nouvelles questions qui s'imposent aux élèves à travers l'avancée dans l'étude au sein de laquelle ils sont engagés.

Dans le cadre de la variante P_1^{+++} que nous tentons de développer, l'enseignant change de rôle. Au lieu d'être celui qui montre le savoir, il est celui qui dirige la recherche, la relance par de nouvelles questions lorsqu'elle le nécessite, lance des pistes à explorer. A l'opposé d'une conception de type constructiviste assez répandue chez certains noosphériens, il ne s'interdit pas d'enseigner, autrement dit de changer la situation adidactique en une situation didactique ; mais, le plus souvent et pour cela, une fois seulement que les questions ont été travaillées par les élèves et qu'il évalue hors d'atteinte les réponses. Soit parce qu'elles sont trop difficiles à produire à partir des moyens dont on dispose, soit parce que le temps institutionnellement donné manque pour cela. Il remplit alors davantage, au sein du milieu du schéma herbartien et depuis le temps de la classe, un rôle de média que les élèves peuvent interroger lorsque l'étude bute sur des questions pour lesquelles le seul équipement praxéologique dont ils disposent ne permet pas de construire des réponses dans un temps raisonnable, ou en l'absence de tout autre type de médias.

Construire des AER et PER est coûteux car, sous la contrainte portant sur P_1^{+++} d'enseignement d'un programme national sans la possibilité d'y déroger, la totalité de l'enseignement reste à bâtir à nouveaux frais, puis à tester dans les classes. Nos propositions d'ingénieries ne couvraient pas l'intégralité du programme du cycle 4 qui, par ailleurs, a connu des changements au cours de l'expérimentation, à la rentrée scolaire 2016. C'est ainsi que l'un d'entre nous, Sébastien Velon, a dû dans un premier temps construire un PER sur les frises et pavages du plan, thème mis alors au programme, puis qui a été partiellement affaibli lors d'un aménagement de ce même programme, entraînant une dépense d'énergie dans la conception de ressources que nous n'avons pu exploiter…

En classe de 5^e, nous disposions d'un PER sur les nombres relatifs, qui court jusqu'en classe de 4^e ; d'un PER sur la symétrie centrale et ses applications, partie prenante d'un PER plus large sur la géométrie et les isométries planes, qui court jusqu'en 3^e ; d'un PER sur la modélisation algébrique des programmes de calcul qui court lui-aussi jusqu'en classe de 3^e. En classe de 4^e, au-delà des PER débutés en 5^e, démarre un PER sur les similitudes planes qui permet de rencontrer le théorème de Thalès. En classe de 3^e se poursuivent les PER commencés dans les classes qui précèdent. Des parties du programme ont été enseignées à partir de ressources issues d'ingénieries didactiques externes au réseau, notamment extraites de *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* (Brousseau N. et G., 1987). Nous ne couvrons donc pas l'ensemble du programme du cycle 4 sous la forme d'AER et de PER, notamment dans le domaine probabilités-statistique. Cependant, des modèles praxéologiques de référence ont été élaborés pour d'autres parties du programme ; ils serviront d'infrastructures pour des PER à venir[8].

---

[8] Quelques-unes des propositions d'AER et de PER sont visibles aux adresses ci-dessous, mais beaucoup d'autres ne sont pas mises en ligne car continuellement en travail, intégrant les analyses issues d'observations :
http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-entree-dans-l-algebre-par-les-nombres-relatifs/
http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme/
http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme/

Une certaine organisation mathématique inscrite dans le programme officiel, qui fixe le niveau des classes où certaines notions sont à enseigner – ce que respectent scrupuleusement les professeurs –, contraint la possibilité d'une production raisonnée d'AER telle que nous l'entendons, car elle touche au savoir lui-même. Par exemple, l'enseignement fixé à la classe de 3e du théorème de Thalès, théorème fondamental sur la similitude, interdit désormais son utilisation pour l'enseignement du théorème de Pythagore dans la classe de 4e qui précède. Il relève pourtant de la similitude, tout autant que le théorème de Thalès, bien que les manuels n'en proposent qu'une « monstration » par des découpages dans le seul cas des carrés construits sur les côtés.

3. Expérimentation, observation et analyse dans un dispositif spécifiquement dédié

3. 1. Expérimenter dans un Lieu d'Éducation Associé à l'Institut Français de l'Éducation

Au début des années 2010, l'Institut Français de l'Éducation (IFé) a initié de nouveaux dispositifs de recherche en éducation qui reprenaient et prolongeaient, par bien des points, la forme collaborative associant chercheurs et enseignants que nous connaissions dans les IREM depuis leur fondation, à la fin des années 1960. L'une des particularités du dispositif tenait à ce que les recherches collaboratives à mener soient attachées à un lieu d'éducation ; d'où le nom de Lieu d'Éducation Associé à l'IFé (LéA). Le travail du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, développé au sein du projet PERMES, avait antérieurement pris pour établissement expérimental et d'observation un collège de l'agglomération marseillaise. Celui-ci est donc devenu LéA et s'y sont rattachés d'autres collèges : le réseau ainsi constitué a pu intégrer des professeurs venus de huit collèges. La structure LéA a aussi permis de disposer de forces et d'une audience plus importantes, tout en poursuivant et approfondissant le travail mené une dizaine d'années auparavant. À la fin des six ans de l'opération LéA, en juin 2018, vingt professeurs dont trois doctorants, un enseignant-chercheur et une étudiante italienne en master de didactique fréquentaient le dispositif.

La question de recherche à laquelle le dispositif voulait apporter réponse, consistait à évaluer à quelles conditions, et sous quelles contraintes, il était localement possible, dans des établissements scolaires du système actuel, de modifier l'enseignement des mathématiques pour s'orienter vers le paradigme P_1^{+++}. Loin d'un optimisme naïf que partagent parfois entre eux certains pédagogues, nous savions que le prix à payer en termes de changement ne pouvait pas se situer au-delà de l'expérience locale[9]. Cette contrainte résulte avant tout de la satisfaction d'une condition minimale portant sur l'enrôlement de professeurs volontaires pour s'engager dans un changement de la fonction enseignante.

Un tel changement dans les habitudes professorales est en effet parfois douloureusement vécu, au point que certains y renoncent très vite, comme le montre l'exemple qui suit,

[9] « [les pratiques éducatives] ne sont pas comme on l'a cru longtemps, des combinaisons plus ou moins arbitraires et artificielles, qui ne doivent l'existence qu'à l'influence capricieuse de volontés toujours contingentes. Elles constituent, au contraire, de véritables institutions sociales. […] Il n'est pas d'homme qui puisse faire qu'une société ait, à un moment donné, un autre système d'éducation que celui qui est impliqué dans sa structure […] », écrit Durkheim dans *Education et sociologie* (1922).
Le propos de Durkheim pourrait être interprété comme renvoyant à un fixisme désespérant, mais cependant immédiatement démenti par l'observation de l'évolution historique des systèmes d'éducation. Pour nous, il signifie seulement qu'à une société donnée correspond généralement un paradigme éducatif donné, et que les changements portant sur ce dernier résultent des changements de et dans la société. Modifier localement un paradigme, comme nous avons tenté de le faire, n'a pas pour ambition démesurée de modifier celui qui prévaut, mais d'indiquer une direction possible dont le suivi impliquerait des efforts au niveau de la société, dépassant la volonté d'un seul homme, comme l'indique Durkheim.

consigné dans le mémoire de master 2 de Cécile Ferrero. Extérieure au LéA, une professeure en 3^{e} (élèves de 14 à 15 ans) a bien voulu, pour les besoins de la recherche menée dans le cadre de ce mémoire, faire passer dans sa classe une AER portant sur la trigonométrie. Dans l'entretien qui suit ces séances, elle déclare à Cécile Ferrero qui a conçu l'AER :

> « Je ne donne jamais ce type d'activité en classe parce que pour moi ça laisse trop de portes ouvertes... alors je sais que c'est bien de les faire chercher... mais ça part dans tous les sens... ils partent dans tous les sens globalement et c'est très difficile pour moi de recentrer les choses. […] Quand je donne des activités, elles sont beaucoup plus dirigées et là du coup pour les élèves je pense que c'était vraiment la récréation parce qu'ils n'ont pas l'habitude de travailler sur ce type de problème... de travailler en groupe... Je dirige beaucoup plus les choses. C'est un tort sans doute... […] Parce que je ne veux pas que les choses m'échappent. Mais, ça c'est moi... C'est pas bien, sans aucun doute. […] »
> « Question : Et qu'est-ce qui pourrait t'arriver si les choses t'échappaient ? Réponse : Pour moi, là globalement c'est le bazar. »

Les propos tenus par cette enseignante montrent sa difficulté à abandonner la position du maître qui contrôle, au profit d'une position de professeur qui dirige la recherche dans une situation où le *topos* d'élèves est considérablement élargi. Cette situation de classe lui apparaît insupportable car, en laissant « trop de portes ouvertes, ça part dans tous les sens ». À tel point que lorsque sa classe s'est engagée dans la recherche de réponses à des questions qui ne sont pas « beaucoup plus dirigées », elle peut être assimilée à « la récréation », au « bazar ».

A l'exception des professeurs du groupe didactique de l'IREM, peu de professeurs étaient prêts pour une telle aventure.

3. 2. Les conditions de l'expérimentation et la méthodologie mise en place

La partie de l'expérimentation dont nous rendons compte dans cet article a porté sur un temps long, six ans, et sur des cohortes d'élèves du cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) du même collège[10]. Tous les élèves des classes engagées dans l'expérimentation étudiaient les mathématiques du programme, contrainte indépassable dans le cadre du paradigme P_1, sous la direction du professeur, à partir d'activités et de parcours d'étude et de recherche. Pour en évaluer les effets, tant du point de vue des apprentissages et du rapport à l'étude des mathématiques des élèves que des rapports à l'enseignement des professeurs du LéA, on a recouru à une méthodologie de recueil et de traitement d'informations de natures quantitative et qualitative.

Une méthodologie d'ordre quantitatif a essentiellement été utilisée auprès des cohortes d'élèves sur plusieurs années. Une méthodologie qualitative, par recueil d'écrits demandés aux professeurs, a aussi été mise en place : cahiers d'élèves et préparations de professeurs. Elle a été complétée par des entretiens semi-directifs sur un échantillon d'une douzaine d'élèves de la dernière classe du cursus (élèves de 14 à 15 ans) choisis par leurs professeurs selon le critère « bon-moyen-faible ». Des séances de classe ont été filmées, de même que les séances de quinzaine réunissant professeurs et chercheurs pendant quatre des six années du LéA. Nous détaillons ci-dessous quelques-uns des principaux éléments propres à l'expérimentation et à la méthodologie mise en place.

[10] Deux thèses ont pris pour terrains d'étude d'autres établissements du réseau du LéA. L'une (Bernad, 2017) a traité des besoins mathématiques et didactiques des professeurs pour un enseignement par PER. L'autre (Méjani, 2018) a étudié la construction du milieu dans des groupes d'élèves en situation adidactique d'étude et de recherche.

L'établissement à l'origine du LéA est un collège de grande taille, structuré selon une organisation en huit classes de trente élèves environ pour chacun des quatre niveaux. Lorsque c'est nécessaire, nous l'appelons « le collège principal ». L'étude statistique a porté sur les trois derniers niveaux 5^e^, 4^e^ et 3^e^ (élèves de 12 à 15 ans) ; ceux sur lesquels un enseignement par étude et recherche a été organisé.

En 5^e^ (élèves de 12 à 13 ans), les huit classes ont été soumises en début d'année à un pré-test. Quatre classes ont été choisies pour être enseignées par AER et PER. Elles ont été appariées à quatre classes de même niveau scolaire, évaluées en pré-test mais enseignées de manière traditionnelle. Afin que nous puissions évaluer les effets comparés d'un enseignement par étude et recherche avec un enseignement traditionnel, l'administration s'est engagée à ce que la composition des classes soit conservée, c'est-à-dire qu'elles restent composées des mêmes élèves au long des trois années du cycle, tout en changeant de professeur d'une année sur l'autre, afin de minimiser l'effet professeur. La promesse de conservation des cohortes dans les mêmes classes a parfois rencontré des difficultés : la constitution des classes obéit administrativement à une autre logique que celle de la recherche (choix des langues vivantes ou des options, séparation d'élèves perturbateurs, etc.)

À la fin de chacun des trois niveaux du cursus, une évaluation était passée par les élèves de toutes les classes concernées, « expérimentales » ou « traditionnelles ». Conçues avec la participation des professeurs du LéA, elle s'appuyait, lorsque cela était possible, sur les évaluations nationales normalisées proposées par la *Direction de l'Evaluation, de la Prospective et de la Performance* (DEPP) du Ministère de l'Education Nationale. Le codage était confié aux professeurs du LéA pour un traitement statistique délégué, dans le cadre de leur mémoire de fin d'année, à deux étudiants du Master 1 *Mathématiques appliquées et sciences sociales* de l'Université d'Aix-Marseille. Nous voulions aussi évaluer si le rapport à l'étude des mathématiques avait changé pour les élèves soumis à un enseignement expérimental durant trois années. Pour cela, tous les élèves de 3^e^ remplissaient en fin d'année un questionnaire qualitatif portant sur les grands domaines des mathématiques qu'ils avaient étudiés au cours des trois années de leur cursus.

Cette évaluation a été complétée, fin 2015, par des entretiens semi-directifs auprès d'un échantillon d'une douzaine d'élèves des classes LéA, choisis par leurs professeurs selon, comme on l'a dit, le critère « bon-moyen-faible ». Les entretiens, filmés et retranscrits, étaient initiés par le principe de l'instruction au sosie : « si tu deviens un jour professeur de mathématiques, peux-tu m'indiquer comment tu t'y prendrais pour faire cours auprès de tes élèves ? »

Le recueil des données concernant les professeurs a, lui aussi, suivi des voies diverses. La masse considérable d'informations obtenues à partir des films de 3 h des réunions de quinzaine du LéA n'a pu être totalement retranscrite et traitée ; seules certaines parties jugées intéressantes pour la recherche l'ont été. Afin d'étudier la transposition didactique interne que les professeurs devaient opérer au cours de l'enseignement en classe, les classes de deux professeures du LéA des collèges du réseau, enseignant dans deux autres collèges que le collège principal, ont été filmées durant les premières séances d'un PER sur l'enseignement des nombres relatifs en 5^e^, puis retranscrites. Cette prise d'informations a été complétée par le recueil de plusieurs autres types de documents. Ces deux professeures, ainsi qu'une troisième du collège principal, ont fourni leurs notes personnelles, essentiellement destinées au repérage des points mathématiques et didactiques qu'elles jugeaient essentiels, pour les aider à la prise en mains de ce PER. Toujours dans la même optique, des entretiens ont aussi été menés auprès de ces trois professeures. Une grande partie des données recueillies auprès d'elles ont nourri la thèse de Karine Bernad qui montre la permanence de certaines habitudes professorales acquises dans la pratique d'un enseignement par ostension déguisée, au cours d'un enseignement par étude et recherche.

Dans un quatrième collège du réseau, nous avons recueilli des données sur le travail des élèves au cours d'une AER et sur l'organisation du travail mathématique au sein de groupes ; l'observation s'est déroulée dans quatre classes de 4^{e} enseignées par trois des professeurs du LéA. Afin de s'habituer à travailler ensemble, les élèves avaient auparavant été engagés dans une des AER de géométrie portant sur le théorème de Thalès. Puis, ces mêmes groupes ont été filmés travaillant sur une toute autre AER ; celle portant sur les équations du 1er degré à une inconnue. Dans chacune des quatre classes et durant trois séances, des films ont été réalisés puis transcrits. L'analyse en a été faite en suivant une méthodologie de type clinique. Les données recueillies ont nourri la thèse de Farida Méjani. Elle apporte de précieuses informations sur la constitution et l'évolution du milieu du schéma herbartien au sein de groupes engagés dans un processus d'étude par la recherche (Méjani, F. & Matheron, Y., 2021).

Enfin, à la fin de l'expérience du LéA, un questionnaire ouvert a été adressé à l'ensemble des professeurs ayant enseigné par AER et PER, afin qu'ils expriment par écrit des éléments du bilan de leur participation au LéA. Les questions portaient sur les éventuels changements repérés dans leur établissement, leurs classes, les élèves, sur eux-mêmes dans l'exercice du métier, ainsi que sur leurs contributions personnelles au projet du LéA.

4. Des résultats

4. 1. Le point de vue des professeurs

Si, bien entendu, les réponses des professeurs du LéA fournissent des informations relatives à cette expérience, elles fournissent aussi, en contrepoint, des informations sur l'état du système d'enseignement des mathématiques, ainsi que des éléments relatifs à la fonction qu'ils y occupent.

Tous répondent que leur venue au LéA[11] correspond à des besoins : celui d'une insatisfaction portant sur l'enseignement actuel des mathématiques, celui de surmonter les difficultés engendrées par l'enseignement de certaines notions, de travailler en équipe, d'expérimenter « autre chose » : soit à partir d'AER-PER préexistants et robustes, soit en contribuant à en concevoir de nouveaux. Leurs réponses montrent que le changement de paradigme didactique se répercute sur les conditions professionnelles extérieures au temps de la classe. Plus précisément, certains trouvent, au sein des réunions du LéA, la reconnaissance d'une compétence mathématique acquise lors de leurs études supérieures mais qui leur semblait perdue : soit de par la forme prise par l'enseignement qu'ils doivent dispenser, soit de par les contenus de programme qu'ils jugent éloignés de l'idée qu'ils se font de la qualité des mathématiques à enseigner. Par exemple, trois professeurs d'un même collège écrivent :

> […] le LéA redonne du sens à notre enseignement, cela nous permet de travailler tous ensemble sur des PER qui permettent de remettre en cohérence les notions du programme. En effet, avec le LéA nous avons une véritable réflexion sur la construction d'un PER ; cela nous permet de continuer à faire des mathématiques malgré le nouveau programme. Cela permet aussi d'aborder les mathématiques de façon plus « noble », d'éviter les recettes, cela donne des bases aux élèves plus solides, ils entrevoient le « pourquoi » et ne se

[11] Dans ce qui suit, nous désignons par « professeurs du LéA » les professeurs du LéA qui expérimentent des AER et PER dans leurs classes, assistent aux réunions de quinzaine et se soumettent aux contraintes imposées par le dispositif de recherche mis en place au LéA.

> contentent plus uniquement du « comment ».

On ne peut s'empêcher de voir, à travers ces propos et *a contrario*, l'expression d'une souffrance à devoir enseigner des savoir-faire au détriment de savoirs mathématiques appuyés sur des raisons, des contenus tournant le dos à certains des fondements épistémologiques des mathématiques que les professeurs souhaitent aussi transmettre. On perçoit, dans ces lignes qui disent le vécu d'enseignants de mathématiques en Collège, l'écho d'un constat relevé dans le rapport de la récente commission Villani-Torossian, mise en place à la suite des évaluations des élèves français montrant des faiblesses en mathématiques qui s'accentuent :

> Les vérités sont trop souvent assénées, plutôt que démontrées […] Il est regrettable que les vérités mathématiques (démontrables) soient ramenées à un statut de vérités contestables. […] Il se trouve que l'on peut constater une quasi disparition des « démonstrations » des résultats proposés dans les manuels de collège, par exemple, et dans certaines pratiques de classe.

Depuis la position qui est la leur au sein du système éducatif tel qu'il est, les professeurs du LéA se considèrent obligés par le type d'enseignement qu'on leur demande d'adopter, et qui ne les satisfait pas. En tant qu'agents du système, ils sont soumis au contrat institutionnel qui fixe, parfois de manière implicite et à partir de multiples contraintes – venues des parents, des élèves, des contenus des manuels, des préconisations institutionnelles, du temps dévolu à l'enseignement, des programmes –, la norme attendue pour enseigner des mathématiques ; autrement dit le contrat dont les termes définissent le paradigme scolaire en vigueur. Une routine confortable s'installe que, pourtant, peu parmi leurs collègues souhaitent rompre ; ce que les professeurs du LéA regrettent. On mesure par là la quantité d'énergie à dépenser pour rendre effectif un changement de paradigme du système éducatif.

C'est ce que traduit le texte d'une professeure, seule de son collège à fréquenter le LéA, alors que l'équipe de mathématiques y compte six à sept membres selon les années :

> Tous mes collègues (y compris les stagiaires) sont au courant de ma participation à ce groupe de travail mais nous n'avons pas d'échanges sur les contenus des travaux faits au Léa. Ils ne m'ont jamais demandé par exemple de leur montrer les documents.
> Pour autant, certains d'entre eux ont pu voir cette année ou les années précédentes, dans le cadre de co-interventions, des séances faisant partie d'un PER ou d'une AER. Ils ont montré parfois un certain intérêt au sujet de la séance faite et/ou de passages ponctuels mais pas jusqu'à s'informer sur le parcours entier.

Dans le même registre, le décalage entre la forme d'enseignement que porte un professeur du LéA et le reste de l'équipe de mathématiques de son établissement est parfois trop grand pour être supporté par des professeurs installés dans des habitudes. On l'a vu dans le cas de la professeure engagée dans une AER sur la trigonométrie. C'est aussi ce qu'exprime, à propos de ses collègues professeurs de mathématiques de son établissement, un des professeurs ayant récemment embrassé cette profession après avoir quitté son métier d'ingénieur, exercé pendant une quinzaine d'années.

> Je ne sais pas quel phénomène a créé une rupture avec mes collègues. Aujourd'hui, il serait hasardeux de penser que le LéA en est la cause principale. D'autres raisons peuvent l'expliquer. Quelques exemples : nouveau professeur à 39 ans, professeur inexpérimenté avec des opinions sur l'enseignement, des questionnements quant à leurs façons d'enseigner, un professeur considérant qu'il détient un « petit savoir », le fait que je précise que certains professeurs procèdent différemment.

Ces deux derniers témoignages permettent de mettre en relief, et par contraste, l'existence et la soumission au paradigme en vigueur. On devine que la pseudo « liberté pédagogique de l'enseignant » est toute relative, à partir de l'évocation à regret d'une installation de leurs collègues dans une routine à laquelle ils ne souhaitent déroger, même lorsque leur est proposée une autre façon d'enseigner, avec l'appui d'universitaires. Changer peut être perçu comme le déni d'une professionnalité enseignante toujours considérée comme attachée à divers facteurs touchant à la personne – le charisme, l'expérience –, très loin d'un possible savoir savant d'ordre professionnel. Dans d'autres cas, à l'opposé, l'expérimentation offre un espace de débats qui excèdent le moment des réunions et rejaillissent au sein de l'établissement auprès de professeurs extérieurs à l'expérimentation. C'est ce que remarquent d'autres professeurs du LéA :

> Cela modifie en profondeur les échanges entre collègues de la discipline. En effet, on ne se contente plus de discuter uniquement de la progression commune, c'est un véritable travail en profondeur qui est mis en place dans les équipes. Par exemple lorsque nous avons travaillé sur le PER de Thalès, nous avons mutualisé les efforts : pour préparer des fichiers sur GéoGebra, pour construire les triangles en carton... mais surtout nous avons beaucoup échangé sur les réactions des élèves, les questions qu'ils se sont posés, ainsi nous avons pu anticiper les points de blocage éventuel.
> Ce travail soulève aussi un questionnement au sein de l'équipe pédagogique de la classe, mais même au niveau du collège, car c'est une vraie dynamique qui donne du sens au métier d'enseignant. Nous avons même quelquefois des échanges avec les enseignants de lycée sur nos pratiques.

C'est aussi ce qu'indique un professeur d'un collège REP+ (REP+ concerne une typologie de collèges accueillant un nombre important d'élèves en difficultés scolaires ou sociales)

> Avec deux autres collègues, nous avons décortiqué les programmes de cycle 3[12] en types de tâches et techniques qui nous ont par la suite servi pour la création d'une progression commune sur le cycle 3 avec les PE[13]. […] Concernant le rayonnement du LéA (il me semble que c'est de ça dont il est question), je fais partie du groupe de recherche académique collège sur l'éducation prioritaire. Je pourrais à terme peut-être diffuser certains documents ou vidéos auprès des T1[14] afin de montrer des exemples d'applications des PER en REP+ (car le reproche que j'entends souvent est leur soi-disant infaisabilité dans ces milieux) […]

Le « changement des pratiques » des professeurs s'exerce sur le pilotage de la classe, en laissant davantage de place aux élèves, et modifie en retour le rapport des élèves à l'étude :

> Cela modifie le travail en classe en mettant en avant les bienfaits du travail en groupe. Nous avons modifié notre façon de constituer des groupes, puis nous avons laissé davantage de temps de recherche pour chacun. Nous avons appris à laisser émerger les questions plutôt que de les proposer nous-mêmes.
> Ce type de travail permet aussi de gérer l'hétérogénéité : dans un parcours, les questions de départ sont « simples » (les prérequis nécessaires sont revus en amont) et les élèves en grande difficulté trouvent leur place : les autres élèves du groupe les écoutent, leurs idées sont souvent intéressantes et ils peuvent ensuite s'approprier la notion et se remettre sur les rails de la réussite.

Mais les changements ou améliorations chez les élèves sont parfois difficiles à évaluer du point de vue du professeur, bien que des traces existent. Ainsi, pour un professeur en collège REP+ :

> Il est difficile de mesurer l'impact que peut avoir mon enseignement sur les élèves. Je peux juste constater que les résultats de mes élèves lors des exercices de recherche des DNB blancs[15] sont bien meilleurs que ceux des élèves d'autres classes, constatation qui a été effectuée par l'ensemble de l'équipe de mathématiques.

C'est aussi ce que relève une professeure d'un collège en notant changements et résistances chez ses élèves, et en formulant, elle aussi, le regret d'une certaine solitude :

---

[12] Le cycle 3 regroupe les deux dernières classes de l'école primaire et la première classe du Collège.
[13] Les PE sont les Professeurs des Ecoles, enseignants polyvalents de l'école primaire.
[14] Les T1 sont les professeurs titulaires dont c'est la première année d'exercice.
[15] Il s'agit de l'entraînement au Diplôme National du Brevet (DNB), examen qui se passe à la fin des études au Collège, à 15 ans.

> Je perçois lors des séances avec ce mode de travail un impact sur l'implication des élèves et une évolution de leur posture en situation de recherche. Au départ ça leur paraît difficile.
> Par exemple, au départ du PER sur le produit des nombres relatifs, quand on leur demande de trouver la preuve que le produit d'un positif et d'un négatif est négatif : « Pourquoi vous ne nous expliquez pas comment faire directement ? » ; « Je connais une méthode beaucoup plus simple et beaucoup plus rapide » ; « On va toujours être obligés de faire autant de calculs ? »
> Et puis ils finissent par se prendre au jeu, sont plus actifs, se posent et posent plus de questions. Je crois aussi qu'ils comprennent mieux l'importance de la preuve et qu'ils perçoivent plus facilement les liens entre les différentes notions abordées.
> Mais, il me semble que cet impact reste limité pour mes élèves. Je suis la seule enseignante impliquée dans ce dispositif dans mon collège. Il n'y a donc pas de possibilité de suivi de cohorte, pas toujours la possibilité de passation d'un PER intégral.

L'installation d'un nouveau type de contrat didactique prend du temps, tant pour les élèves que pour leurs parents ; on n'abandonne pas si facilement le paradigme qui énonce que « l'enseignement c'est avant tout de l'ostension », quelle soit directe ou déguisée, et qu'une séance de classe débute par un cours dispensé par le professeur, les élèves n'ayant rien d'autre à faire que de le suivre :

> Les élèves de 5^{e} et surtout de 3^{e} sont troublés. En début d'année, ils n'ont cessé de réclamer un format de séquences leçon/exercices, les parents d'élèves aussi. Aujourd'hui, le fonctionnement de l'enseignement est stabilisé. Il reste encore en questionnement pour certains élèves. Pour d'autres, un refus de construction du savoir persiste.

D'autres professeurs voient dans la place plus large accordée aux élèves au cours d'un PER, certains des objectifs assignés par les Instructions Officielles :

> L'enseignement par PER permet de développer chez les élèves des compétences indispensables au travail mathématique : « chercher », « raisonner », « communiquer », « modéliser ». Au moment où on s'inquiète de façon officielle des difficultés de l'enseignement des mathématiques, ce type de démarche pourrait apporter une partie de la solution.

4. 2. Le point de vue des élèves

Les professeurs perçoivent, comme on l'a vu, des changements ou des résistances chez leurs élèves, induits par un enseignement basé sur l'étude par AER et PER. Nous souhaitions évaluer les élèves LéA et non LéA sur les trois années du cycle 4. Pour cela et comme indiqué précédemment, nous avons mis en place plusieurs dispositifs méthodologiques : tests de connaissances passés par tous les élèves du collège, classes expérimentales ou pas, à la fin de chacune des trois années du cycle, évaluation qualitative portant sur le rapport à l'étude des mathématiques pour tous les élèves en fin de 3^{e}, entretiens semi-directifs avec quelques élèves de 3^{e} ayant suivi un enseignement par AER et PER.

- Le rapport à l'organisation de l'étude des mathématiques

Les élèves perçoivent nettement les changements dans le type d'enseignement proposé par AER et PER. C'est ce que confirment dans un premier temps les entretiens semi-directifs en 3^{e} menés sous la forme dite de « l'instruction au sosie » : demander aux élèves de s'imaginer professeur de mathématiques afin d'atteindre une partie de leur rapport à ce qu'ils attendent de la fonction de professeur en mathématiques.
Nous sélectionnons ci-dessous quelques extraits d'entretiens d'élèves qui, au cours du cycle et pour des raisons administratives précédemment évoquées (non respect, lors du changement de classe et dans quelques cas, du suivi dans la même classe expérimentale ou pas), n'ont pas continuellement fréquenté des classes expérimentales LéA mais les ont intégrées en 3^{e}. La comparaison entre enseignement par étude et recherche et enseignement ordinaire leur

apparaît plus clairement, bien qu'on ne puisse éliminer les biais connus relatifs aux réponses allant dans le sens des attentes que le questionné croit percevoir chez le questionneur. Ci-dessous un extrait significatif avec l'élève E_1 qui répond à la question « comment tu ferais si tu étais professeur de mathématiques ? »

> E_1 : je ferais d'abord chercher la solution par les élèves sans leur expliquer.
> […]
> E_1 : cela nous permet de comprendre la leçon par nous mêmes.
> Q : une autre méthode, cela consisterait à faire quoi ?
> E_1 : donner directement la leçon et faire travailler directement dessus.
> Q : pourquoi tu choisirais la première méthode
> E_1 : parce que c'est plus intéressant à comprendre. Quand on cherche nous–mêmes, c'est plus facile à comprendre.
> *L'échange tourne alors sur l'enseignement par AER-PER que l'élève évoque.*
> E_1 : on a un problème. Puis on essaye d'utiliser les connaissances que l'on a pour essayer de trouver. C'est plus facile, … c'est plus progressif.
> […]
> E_1 : si on trouve dès le début la solution par nous-mêmes, c'est qu'on a compris. Du coup, on n'a pas besoin de chercher pendant des heures.
> Q : qui fait la leçon ?
> E_1 : c'est plus (davantage) les élèves.

E_1 parvient à décrire avec ses mots le changement du rapport à l'étude induit par le dispositif, à justifier l'intérêt d'une dévolution de la question aux élèves : « chercher la solution sans expliquer », car « cela permet de comprendre la leçon » et « c'est plus intéressant à comprendre quand on cherche nous-mêmes », « c'est plus les élèves » qui font la leçon.

L'élève E_2 a suivi un enseignement « traditionnel » avec deux professeurs différents en 5^e^ et en 4^e^. La même instruction au sosie lui est proposée.

> E_2 : faire comme M^me^ X, donner des choses pour qu'ils *[les élèves]* comprennent d'eux-mêmes. Pas partir d'une propriété. Commencer par des activités, puis faire des hypothèses pour bien comprendre comment ça marche.
> Q : tu penses que c'est une forme d'enseignement qui permet de mieux faire comprendre ?
> E_2 : oui, parce que si on part d'une propriété on ne sait pas forcément pourquoi c'est comme ça.
> […]
> Q : de ton point de vue, ce qui compte c'est de chercher.
> E_2 : oui, il ne faut pas que ça. Il faut aussi un cours pour bien comprendre.

Avec E_2 apparaît la perception de la nécessité de rencontrer et travailler les raisons d'être des notions mathématiques, car « si on part d'une propriété on ne sait pas forcément pourquoi c'est comme ça », alors qu'il faut « faire des hypothèses pour bien comprendre comment ça marche » ; ce qui est réalisé quand on donne « des choses pour qu'ils *[les élèves]* comprennent d'eux-mêmes ». Pour cette élève, il est nécessaire qu'une institutionnalisation ait lieu car rechercher ne suffit pas : « il faut aussi un cours pour bien comprendre. »

Les propos tenus par E_1 et E_2 sont représentatifs d'élèves qui apprécient le changement de paradigme scolaire que le LéA tente localement d'installer.

- Le rapport aux mathématiques

Au-delà, les effets d'un tel changement transparaissent chez les élèves LéA dans leurs rapports aux mathématiques, en ce qui concerne les raisons d'être de certains domaines mathématiques. C'est ce que met en évidence l'évaluation qualitative par questionnaires, passée par tous les élèves de 3^e^ du collège ; soit chaque année par environ 100 élèves LéA et

100 élèves non LéA. Ils avaient à choisir entre accord et désaccord avec certaines affirmations qui leur étaient proposées, variant de 1 pour total désaccord à 4 pour accord total, en cochant une des cases. Nous retenons les réponses fournies dans trois tableaux auxquels ont répondu les élèves.

Par exemple, le questionnaire interrogeait les élèves sur les raisons du recours à la lettre en algèbre. Pour plus de 95 % des élèves LéA, l'utilisation de la lettre dans des calculs sert à la résolution d'équations, tandis que 21 % des élèves non LéA sont en désaccord.

Selon vous on fait en mathématiques des calculs avec des lettres pour …

		1	**2**	**3**	**4**	Total
A=Résoudre des équations	**Non Léa**	6,42%	14,68%	41,28%	37,61%	100,00 %
	Léa	2,90%	1,45%	49,28%	46,38%	100,00 %

Il en va de même concernant l'une des raisons d'être des nombres relatifs : rendre la soustraction toujours possible. 76 % des élèves LéA sont d'accord avec cette affirmation contre seulement 63 % des non LéA, plus de 36 % de ces derniers étant en désaccord.

		1	**2**	**3**	**4**	**Total**
D=Effectuer des soustractions	**Non Léa**	13,76%	22,94%	39,45%	23,85%	100,00 %
	Léa	7,25%	15,94%	31,88%	44,93%	100,00 %

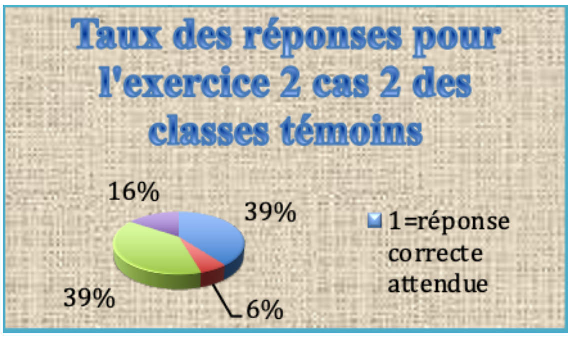
L'engagement dans un processus de recherche modifie les attentes envers le professeur ; autrement dit l'un des termes du contrat didactique. Le professeur doit-il fournir immédiatement une réponse ou, au contraire, laisser une réponse en attente, sachant qu'on y reviendra plus tard ? Les élèves LéA semblent accepter à plus de 56 % qu'engagés dans un processus de recherche d'une question, la réponse puisse prendre du temps. Plus de 70 % des élèves non LéA souhaitent le contraire.

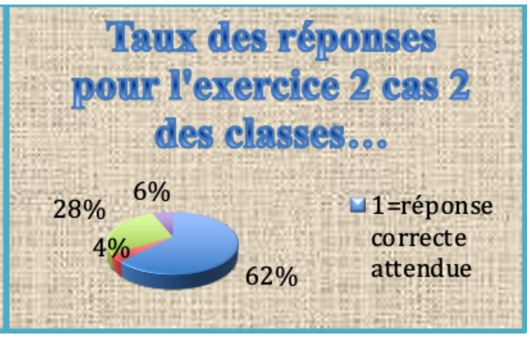
		1	**2**	**3**	**4**	**Total**
C=il lui arrive de dire qu'on répondra à une question plus tard	**Non Léa**	37,61%	33,03%	22,94%	6,42%	100,00%
	Léa	23,19%	20,29%	36,23%	20,29%	100,00%

- Le rapport aux savoir-faire mathématiques (T, τ)

Les données recueillies portaient chaque année sur environ 100 élèves LéA et 100 élèves non LéA pour chacun des trois niveaux du cycle ; soit donc sur environ 600 élèves. Le traitement statistique des données ayant été réalisé par des étudiants de M1 dans le cadre de leurs mémoires, ce que nous identifions comme « item » est souvent devenu pour eux « exercice ». C'est aussi le cas chez les professeurs ayant participé à leur conception ; signe de la prégnance de l'organisation d'un enseignement du type cours-exercices où l'évaluation s'appuie sur des… « exercices ». Cette dénomination se retrouve dans les résultats présentés ci-dessous.

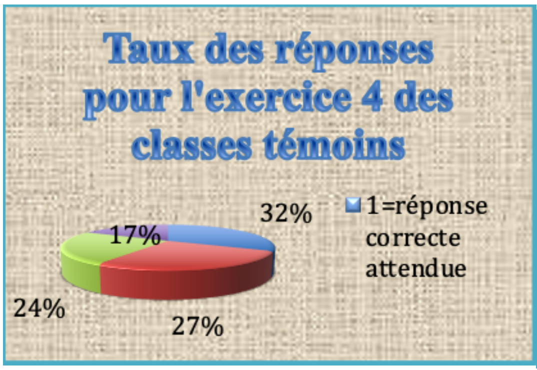
En classe de 5^e, un item demandait de déterminer et de tracer un centre de symétrie absent dans « une figure complexe ». Un autre portait sur l'usage de la définition du quotient de deux entiers, au programme de 6^e, mais que l'on sait difficilement maîtrisée par les élèves jusqu'à la fin du Collège : « le quotient de *a* par *b* est le nombre qui multiplié par *b* donne *a* ». Enfin, un autre item concernait la modélisation algébrique des programmes de calcul. Les diagrammes ci-dessous fournissent une comparaison des résultats des élèves LéA, dites classes expérimentales, et non-LéA, dites classes témoins.

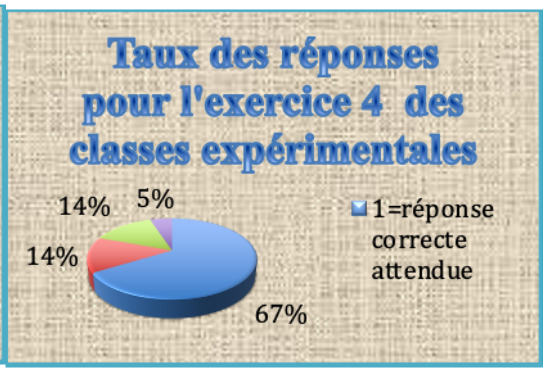




Il existe sur cet item un lien significatif entre « exercice » et « LéA » avec un taux élevé de réponses correctes chez les élèves des classes expérimentales (soit 62 % en bleu), nettement supérieur à ceux des classes témoins (soit 39 % en bleu). Les taux d'élèves des classes témoins, non-LéA, n'ayant pas répondu (16 % en violet) ou donné d'autres réponses (39 % en vert) sont nettement supérieurs à ceux observés chez les élèves des classes expérimentales.

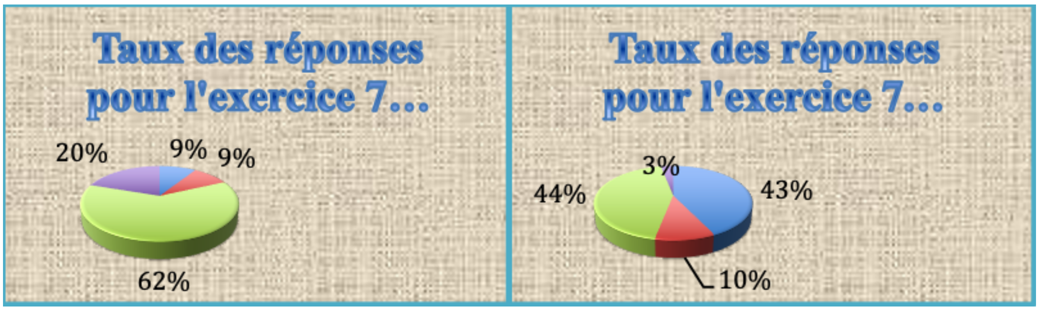
Des résultats du même ordre sont obtenus sur l'item évaluant l'usage technique de la définition du quotient de deux entiers. Il était demandé de compléter l'égalité 7 × … = 11. Le codage 4, en rouge dans les diagrammes circulaires, renvoie à une réponse obtenue par division de 11 par 7 et non sous forme fractionnaire, donnée sous forme de valeur décimale approchée.





Les résultats du test d'indépendance de khi-deux révèlent un lien significatif entre « Exercice 4 » et « LéA ». A travers les deux diagrammes circulaires ci-dessus, 67 % (en bleu) des élèves du groupe expérimental ont donné la réponse correcte, contre 32 % des élèves du groupe témoin. Pour les classes expérimentales, 5 % seulement des élèves n'ont pas répondu et 14 % ont fourni une réponse correcte sans simplification (valeur décimale approchée).

Un des tests portait sur la modélisation des programmes de calcul. L'énoncé était le suivant : « Emma joue avec sa calculatrice. Elle choisit un nombre, lui ajoute 3 et multiplie le résultat obtenu par 5. Emma choisit le nombre, noté *x*. 1) Ecrire en une seule ligne le calcul qu'elle effectue. 2) Pierre lui dit que cela revient à multiplier par 5 ce nombre et à ajouter 15. A-t-il raison ou tort ? Justifier la réponse. » C'est, comme on sait, un problème difficile à ce niveau : deux questions enchaînées dont la réponse à la seconde, utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition, dépend de la modélisation algébrique de la première.



Les variables (Exercice 7 question 2) et (LéA) sont dans ce cas encore dépendantes d'après le test du khi-deux. 43 % des élèves des classes expérimentales ont donné la réponse correcte attendue contre 9 % dans les classes non LéA.

Deux questions de l'évaluation de 5e demandaient d'effectuer des calculs sur les nombres relatifs. Les tableaux ci-dessous, aux résultats en pourcentage, 1 codant une réponse juste et 9 une réponse fausse ou absente, sont éclairants.

Question 2	Exercice 3: Nb relatif	
	LEA	NONLEA
1	100,0	70,4
9	0,0	29,6

Question 6	Exercice 3 : Nb relatif	
	LEA	NONLEA
1	100,0	59,3
9	0,0	31,7

- Une analyse pour des résultats surprenants

Certains résultats nous ont dans un premier temps surpris mais, dans un tout autre sens, contrairement à ceux plutôt encourageants qui précèdent. Ainsi des deux items portant sur le théorème de Thalès en 4e, pour lesquels la réussite des élèves LéA est nettement inférieure à celle des élèves non-LéA. L'analyse que nous avons dû alors mener, et qui demanderait de plus amples développements et validations, nous a cependant permis d'interroger de nouveau l'enseignement « standard » des mathématiques au Collège
Par contre, les deux questions portant sur le théorème de Thalès en 4e, posées avant son changement de place à la rentrée 2016, de la 4e à la 3e, montrent une différence en faveur des élèves non LéA, comme l'indiquent les deux tableaux suivants :

Question 1	Exercice 1 : Géométrie	
	LEA	NONLEA
1	19,5	41,8
4	5,2	2,7
9	75,3	5,5

Question 3	Exercice 1 : Géométrie	
	LEA	NONLEA
1	55,8	76,4
9	9,1	11,8
0	35,1	11,8

Nous avons recherché, avec Sébastien Velon alors en thèse, des causes pouvant expliquer cet écart inattendu entre élèves LéA et non-LéA. Elles nous sont apparues sous forme d'hypothèses portant sur la spécificité des savoirs géométriques et sur les différences d'attente entre contrats didactiques propres à un enseignement traditionnel d'une part, et par étude et recherche d'autre part. En effet, les AER et PER engagent nécessairement vers un important travail de la dimension technologique. Cette dernière semble, en situation de résolution d'une tâche d'évaluation et à ce niveau du cursus, plus facile à mobiliser pour les techniques algébriques que pour les techniques géométriques.

Par exemple, un élève qui se demanderait si la transposition des termes d'une équation d'un membre à l'autre impose ou non un changement de signe, pourrait, afin de pouvoir trancher, recourir assez facilement à la technologie produisant et justifiant cette technique, explicitement étudiée dans le PER sur les équations. Elle repose en effet sur la définition de l'égalité, et peut être facilement sollicitée. Elle lui permet de retrouver et contrôler rapidement la technique à utiliser car cette partie du PER repose sur l'étude et l'usage de « $A(x) = B(x)$ si et seulement si $A(x) - B(x) = 0$ ». De par sa fonction, la technologie autorise, jusqu'à sa maîtrise, un contrôle sur la technique dont se servent effectivement les élèves au cours du PER.

Il en va autrement en géométrie où la dimension technologique, plus lointaine en résolution d'une tâche en évaluation, est fortement associée en PER à la démonstration de théorèmes. Ainsi, même si les élèves ont, au cours du PER, démontré le théorème de Thalès en utilisant le théorème des parallèles équidistantes (cas rationnel) et les cas d'égalité des triangles, ils ne peuvent recourir à ces derniers théorèmes en évaluation, quand il faudra déterminer des longueurs dans un triangle coupé par une parallèle à un côté. Montrer que l'on a établi des rapports à des résultats technologiques insérés dans des démonstration de théorèmes n'est d'ailleurs pas attendu : seule la connaissance du théorème de Thalès et la reconnaissance de la figure prototypique qui l'appelle suffisent.

On retrouve en ce point l'une des conséquences du constat issu du rapport Villani-Torossian sur la disparition de la démonstration au Collège dans l'enseignement ordinaire. Il n'est désormais plus institutionnellement attendu d'engager des élèves dans un travail mathématique appuyé sur les démonstrations de théorèmes pour qu'ils sachent répondre à des items associés à des théorèmes. Ainsi, des élèves temporairement capables de s'engager seulement dans des savoir-faire, sans vérifier que les prémisses autorisent l'instanciation du théorème – citer un théorème et ses hypothèses afin de l'utiliser ne semblant plus attendu au DNB, diplôme de fin de Collège –, peuvent donner l'illusion qu'ils savent répondre convenablement à certaines questions dont les réponses recourent au théorème.

À l'opposé, les élèves enseignés par PER sont conduits à fournir et travailler une démonstration des théorèmes, ce qui induit chez eux un changement du rapport à la démonstration. Nonobstant la vérification qu'un travail de la technique appuyé sur les théorèmes a été suffisamment conduit en géométrie, les élèves LéA font alors preuve de davantage de prudence. Ces résultats montrent que ces élèves ne recourent au théorème que lorsque ses prémisses ont été vérifiées, comme le montre le taux élevé de non réponse à la question 3 de l'item Thalès (35 % contre 11,8 % pour les élèves non LéA).

5. En conclusion

A l'issue d'un travail expérimental mené durant six années et dont les lignes qui précèdent fournissent quelques éléments, certains résultats peuvent être prudemment établis car, comme cela a été mentionné antérieurement, ils portent sur des études menées à petite échelle en regard de la taille du système éducatif ; cela même si des cohortes de plusieurs centaines d'élèves ont pu être concernées pendant le temps du dispositif. Ces résultats sont donc à considérer comme des indicateurs. Les confirmer nécessiterait une étude de plus grande ampleur mais, paradoxalement, impossible à réaliser. Elle supposerait en effet que le système, dans son entier, adhère à la variante P_1^{+++} du paradigme P_1 de la visite des œuvres, sous la contrainte du programme encadrant les œuvres à étudier. La réalité actuelle infirme l'existence d'un tel état paradigmatique.

L'expérience dont nous rendons compte permet d'identifier quelques-unes des conditions locales à mettre en place et quelques-unes des contraintes actuellement indépassables dont il faut tenir compte.

Parmi les conditions pour la variante P_1^{+++} du paradigme P_1, et sans que cette liste soit exhaustive, on peut relever : des professeurs volontaires et accompagnés par des chercheurs pour la gestion des PER, prêts à changer car professionnellement insatisfaits ; l'investissement des degrés de liberté autorisés par le programme ; le choix d'un Modèle Praxéologique de Référence pour un domaine mathématique et la nécessité de s'y tenir ; des PER initiés et dirigés par des didacticiens, de même que des analyses *a priori* et *a posteriori* mathématiques et didactiques ; la régulation des retours d'expérience des professeurs et de l'impact de leur épistémologie spontanée ; la rédaction d'un PER évolutif, modulable ; l'obtention de l'appui de l'administration, etc.

Parmi les contraintes : les PER doivent être finalisés par la nécessité de « faire le programme prescrit » ; il faut tenir compte de la lenteur d'élaboration d'un PER et du poids de l'épistémologie spontanée des enseignants ; il est nécessaire de négocier avec les professeurs, de prendre le temps de les convaincre et de les former ; prendre en compte l'extérieur de la classe et de l'établissement (les autres professeurs, les parents) ; tenir compte d'un temps d'acculturation des professeurs et des élèves à un nouveau type de contrat didactique ; etc.

Les résultats encourageants que nous avons obtenus se retrouvent dans une acculturation scolaire qui percole jusque dans la forme prise par le travail personnel des élèves hors classe. On pourra, par exemple, mentionner une étude publiée en 2020 par Laure Guérin dans le cadre de sa thèse, qui va dans le même sens que les résultats obtenus lors de notre expérimentation. Pour étudier le travail personnel des élèves hors classe, elle a tout d'abord constitué un panel de plus de 700 élèves, représentatif des collégiens de la région Auvergne. Certains d'entre eux sont enseignés à partir d'AER et PER en mathématiques, comme les élèves LéA, tandis que les autres sont enseignés sous forme traditionnelle.

L'analyse statistique montre que « les élèves enseignés par PER ont recours plus que les autres à la consultation des éléments du bloc technologico-théorique dans leur cahier de leçon (p-valeur égale à 0,006). Le bloc technologico-théorique leur permet certes de produire des techniques, mais aussi et surtout d'avoir un contrôle sur l'usage de celles-ci. » (p. 646)[16].
Ces élèves, même s'ils sont faibles, acquièrent une plus grande autonomie dans l'étude personnelle hors classe. Par exemple, l'étude clinique complétant l'étude statistique montrait une élève faible s'autorisant à occuper la position de professeur afin de s'enseigner à elle-

[16] Ce constat rejoint l'analyse faite précédemment à propos des résultats des élèves LéA aux items concernant le théorème de Thalès.

même : « Elle s'imagine professeur, faisant la leçon face à son tableau blanc dans sa chambre. Dans les classes ordinaires, nous n'avions trouvé l'occupation de cette position que chez les bons élèves. » (p. 640).

Ces différentes expériences montrent qu'il est possible de faire vivre, localement, un enseignement des mathématiques tourné vers l'étude et la recherche, le questionnement par les élèves.

Au-delà d'expériences locales, la question de l'élargissement d'un tel type d'enseignement relève, comme l'écrivait déjà Yves Chevallard en 2007, « d'une révolution épistémologique » qui, d'après Durkheim, devrait impacter la société et la structure éducative qu'elle se donne ; elle reste à venir. Les obstacles rencontrées par différentes tentatives, bien que portées en France au niveau du ministère en direction du système, et qui ont vu le jour ces vingt dernières années – on pense aux TPE, IDD, et plus récemment aux laboratoires de mathématiques – illustrent la difficulté à impulser un tel changement de paradigme.

S'il devait advenir, didactique et didacticiens auraient sans nul doute à relever un immense défi. L'effort devrait porter sur la formation des enseignants ainsi que sur la mise à disposition de propositions d'enseignement et d'outils théoriques. Ces derniers permettraient d'accroître sérieusement les connaissances professionnelles attachées au métier d'enseignant.

Éléments bibliographiques

Bernad, K. (2017). *Une contribution à l'étude de conditions et contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche au collège*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Berthelot, R., Salin, M-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux I.

Brousseau, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Texte récupéré le 12 août 2021 sur https://guy-brousseau.com/2319/l%e2%80%99enseignant-dans-la-theorie-des-situations-didactiques-1995/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

Brousseau, N., Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Université de Bordeaux I.

Chalmers, A. (1987). *Qu'est-ce que la science ?* Editions La découverte, Paris.

Chevallard, Y. (1985, éd. 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

Chevallard, Y. (2005). *Journal du séminaire DSMF*, non publié.

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP*, n° 471, pp. 439-461.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Texte récupéré le 12 août 2021 sur http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Chevallard, Y., Strømskag, H. (2021). Conditions d'une transition vers le paradigme du questionnement du monde. A paraître dans cette même revue.

Durkheim, E. (1922). *Education et sociologie*. PUF édition de 1988.

Durkheim, E. (1938). *L'évolution pédagogique en France*. PUF édition de 1990.

Ferrero, C. (2019). *Étude des micro-moments d'évaluation. Un cas de dérégulation du système didactique.* Mémoire de master 2 Mathématiques et applications, parcours didactique des mathématiques de l'Université d'Aix-Marseille, soutenu le 18 septembre 2019.

Guérin, L. (2020). *Le travail personnel des collégiens en mathématiques hors classe. Une étude didactique.* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Matheron, Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21/3*, La Pensée Sauvage, Grenoble

Matheron, Y. (2018). Eléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4, *Petit x*, n° 108, pp. 67-86

Matheron, Y., Méjani, F. (2021). Curriculums institutionnellement offerts, curriculums personnellement vécus : deux exemples. TD associé au cours d'Y. Chevallard, à paraître dans les *Actes de la XX*[e] *Ecole d'été de didactique des mathématiques*

Matheron, Y., Noirfalise, R. (2011). Du développement vers la recherche : quelques résultats, issus du projet (CD)AMPERES, relatifs à la mise en œuvre de PER dans le système d'enseignement secondaire. *In* M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (p. 57-76). Barcelone : CRM.

Méjani, F. (2018). *Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Méjani, F., Matheron, Y. (2018). La dialectique de l'individu et du collectif dans un travail de groupe : une proposition d'analyse didactique, dans *Actes du colloque CITAD6,* 22-26 janvier 2018, Autrans, IMAG Grenoble, pp. 497 – 509.

Méjani, F., Matheron, Y. (2021). Un exemple de genèse d'un milieu didactique dans un travail de groupe. *In Caminhos da educação matemática em revista (online)/IFS | v. 11, n. 1,* ISSN 2358-4750, pp. 280-312.