

Les Nombres de Catalan

GONZALEZ Romain
MATHS ROMAIN
LEBEC PASCAL
BILLOU-GILLES Romain

Propriétés

- B Plus petit des
- A Abscisse finale
- C Nombre de chemins en point

Calcul de longueur n (n=4)

Diagramme d'un chemin de longueur n=4 dans un quadrillage 4x4, restant en dessous de la diagonale.

Autre piste:

On cherche le nombre de chemins dans une grille de côté n (sans diagonale)

- On pose D = droite et H = haut
- On cherche le nombre de combinaisons de D et H pour n=2

6 Chemins possibles

Mise en forme de triangle dans un quadrillage

Triangle de Pascal

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

TRIANGULATION DE POLYÈDRE DE MANIÈRE QU'IL Y AIT UN SEUL TRIANGLE DE 2 CÔTÉS?

PROBLÈME: 2=5, 3=5, 4=5, 5=5, 6=5, 7=5, 8=5, 9=5, 10=5, 11=5, 12=5, 13=5, 14=5, 15=5, 16=5, 17=5, 18=5, 19=5, 20=5, 21=5, 22=5, 23=5, 24=5, 25=5, 26=5, 27=5, 28=5, 29=5, 30=5, 31=5, 32=5, 33=5, 34=5, 35=5, 36=5, 37=5, 38=5, 39=5, 40=5, 41=5, 42=5, 43=5, 44=5, 45=5, 46=5, 47=5, 48=5, 49=5, 50=5, 51=5, 52=5, 53=5, 54=5, 55=5, 56=5, 57=5, 58=5, 59=5, 60=5, 61=5, 62=5, 63=5, 64=5, 65=5, 66=5, 67=5, 68=5, 69=5, 70=5, 71=5, 72=5, 73=5, 74=5, 75=5, 76=5, 77=5, 78=5, 79=5, 80=5, 81=5, 82=5, 83=5, 84=5, 85=5, 86=5, 87=5, 88=5, 89=5, 90=5, 91=5, 92=5, 93=5, 94=5, 95=5, 96=5, 97=5, 98=5, 99=5, 100=5

DEFINITION: NOTION DU VECTEUR DE TRIANGULATION ASSOCIÉ À CHAQUE POLYÈDRE DE 3 CÔTÉS (TRIANGLE) ET À CHAQUE POLYÈDRE DE n CÔTÉS (POLYÈDRE).

FORMULE DE RÉCURSION:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(k) \times T(n-k)$$

Donc $C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k) \times C(n-1-k)$

Nombre de Catalan

Polynôme	Cell
1	1
2	2
5	5
14	14

LES MOTS DERIVABLES

DEFINITION:
Un mot est dérivable, si il ne contient pas de lettres successives.

exemple:
aaa est dérivable
aaabaa n'est pas dérivable

exemple:
D(112221)
= 21121

D(112111)
= 112

D(112111)
= non dérivable

Combinaison des mots dérivables une seule fois:
aaabaa avec n>5
aaba...
aaba... avec a=2 (si non dérivable 2 fois)
exemple
D(aabaa66)=2222...

but: trouver les mots non dérivables et dérivables

non dérivables:
Dn = 10n-1 + Cn
Cn = n=5
D5 = 216 + 4 = 220
D5 = 216 + 4 = 220

dérivable:
Dn = Un - Dn
D5 = U5 - D5
D5 = 2^5 - 216 = 32 - 16 = 16

Théorème:
Un = 2^n

Conjecture:
Si, sur une ligne, on a un mot... abb, alors, au prochain ligne, il sera de forme... abbb

W = ... a

... a ba ... abb
... abaa ... abbb

FORMULES:
mb des mots: Un = 2^n
Somme des dérivables et non dérivables:
Un = Dn + Dn

n	Un	Dn	Dn	Cn
1	2	2	0	0
2	4	4	0	0
3	8	6	2	2
4	16	10	6	6
5	32	16	16	16
6	64	26	38	38
7	128	42	86	86
8	256	68	188	188

Conjecture:
LES MOTS INFINIMENT DÉRIVABLES TENDENT VERS 1 À PARTIR D'UN CERTAIN NOMBRE DE DÉRIVATION.

exemple:
a1 = 211, u1 = 21, u1 = 11
u1 = 2, u1 = 1, ...

exemple:
11211 - dérivable de 11211
1122 - dérivable de 1122

La dérivabilité des mots à P=2

Règles

La tablette de chocolat

↳ Cas des empilements

Étape 1
Étape 2

Pendu!

Explication des cas $2 \times 2, 1 \times n$

$n > 1$

Explication des cas $2 \times m$

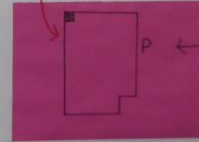
left $m \geq 4$

Méthode de la symétrie

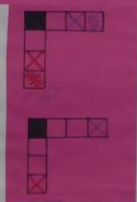
Explication des cas 4×5

$2 \times m$

Démonstration par l'Absurde



Amarauche Ndam
Riou Antonin
Jansefme Anthony
Leccia Pasquim



PROBLÈME DE YOCOZ

Est-il possible de remplir un carré $n \times n$ de telle manière que chacune des sommes des chiffres de ses colonnes et de ses lignes soient différentes ?

Possible pour n pair

n : pair

$S = \{-n, \dots, n\}$

Possible pour n pair

n : pair

$S = \{-n, \dots, n\}$

Premières observations

$S = \{-n, \dots, n\}$

Contraintes pour $n = 3$

1 1 1 3
-1 -1 -1 -3
a b c

$a \neq b \neq c$

$a=1, b=0, c=-1$
 $1-1+1=1$
 $1-1+0=0$
 $1-1-1=-1$
 $a+b+c=1+0-1=0$
 $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

1 1 1 3 Valeur minimale:
 $1-1-1=-1$


-1 -1 -1 -3 Valeur maximale:
 $-1+1+1=1$

$n=3$ impossible

1 1 1 3
-1 -1 0 -2
a b c

$a \neq b$

Combien de manières différentes pourrait-on couvrir une bande de longueur m et largeur 2 avec des dominos


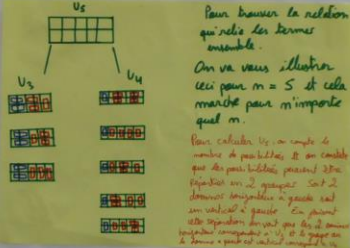
Un domino est la figure suivante: 

La problématique est la suivante:

PAVAGE PAR DES DOMINOS

CARTE LEXIQUE
SÉMINAIRE 2020
MATHS 7ème
PAGE 11/17

Ensuite nous avons calculé $m = 3$
Prenons pour exemple $U_3 = 3$

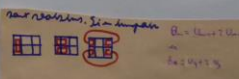
Pour trouver la relation qui relie les termes consécutifs.
On va nous illustrer ceci pour $m = 5$ et cela marche pour m importe quel m .

Pour calculer U_5 , on compte le nombre de possibilités et on constate que des possibilités passent à l'étape suivante en ajoutant un domino (soit à gauche soit à droite). En posant une séparation on voit que les 2 termes consécutifs sont U_3 et U_4 donc $U_5 = U_3 + U_4$.

Tout d'abord nous allons définir les termes U_m et m .
 U_m = nombre de possibilités de couvrir une bande de longueur m
 m = nombre de colonnes

On peut pour les fonctions pour n'importe quel n
 $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$
La formule générale est $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$
On voit facilement que cette formule sont les valeurs de Fibonacci
 $U_1 = 1, U_2 = 1, U_3 = 2, U_4 = 3, U_5 = 5, U_6 = 8, U_7 = 13, U_8 = 21, U_9 = 34, U_{10} = 55, U_{11} = 89, U_{12} = 144, \dots$

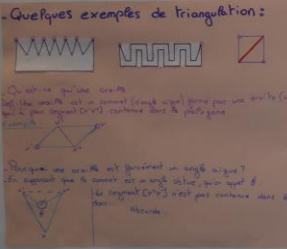
Dominos en bracelet
La différence entre le bracelet et la surface plane, est que des colonnes 1 et 2.



La Triangulation d'un polygone

Qu'est-ce que la triangulation?
C'est découper un polygone en triangles. Dans notre cas nous avons 3 cas.

Rappels:
- Polygone convexe: . Enveloppe convexe d'un polygone: le plus petit polygone convexe contenant un polygone (non convexe).
- Polygone non convexe: . Enveloppe convexe: .

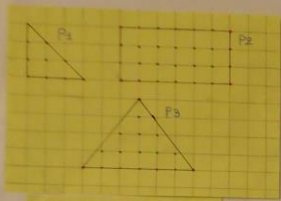


Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

DEMO

On cherche à montrer qu'un polygone à au minimum 2 angles concaves.
Pour former un polygone il faut au minimum 3 angles aigus.
On considère le polygone P à n côtés admet au minimum deux angles aigus.
L'existence d'un angle aigu et la propriété est vraie pour P (à l'échelle des 3 côtés).
On suppose que P a n côtés, $n > 3$, et qu'il a au moins deux angles aigus.
On coupe P par une diagonale pour obtenir un triangle et un polygone à $n-1$ côtés.
On appelle ce sommet le plus proche de P .

On trace la diagonale (d) .
Dans le polygone on divise en deux autres polygones plus petit.
On va montrer que l'existence d'un angle aigu et d'un angle concave.
Par récurrence, on sait que $n=3$ (triangle) admet un angle aigu et un angle convexe.
On suppose que $n-1$ polygones ont un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=4$ (quadrilatère), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=5$ (pentagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=6$ (hexagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=7$ (heptagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=8$ (octogone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=9$ (nonagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=10$ (décagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=11$ (hendécagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=12$ (dodécagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=13$ (trédecagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=14$ (quadrécagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=15$ (quindecagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=16$ (sexdecagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=17$ (septdecagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=18$ (octadécagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=19$ (enneicagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=20$ (icosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=21$ (hénicagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=22$ (docosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=23$ (triaicagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=24$ (tétraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=25$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=26$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=27$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=28$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=29$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=30$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=31$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=32$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=33$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=34$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=35$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=36$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=37$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=38$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=39$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=40$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=41$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=42$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=43$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=44$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=45$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=46$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=47$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=48$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=49$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=50$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=51$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=52$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=53$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=54$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=55$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=56$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=57$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=58$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=59$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=60$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=61$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=62$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=63$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=64$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=65$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=66$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=67$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=68$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=69$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=70$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=71$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=72$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=73$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=74$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=75$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=76$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=77$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=78$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=79$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=80$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=81$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=82$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=83$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=84$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=85$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=86$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=87$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=88$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=89$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=90$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=91$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=92$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=93$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=94$ (tetraicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=95$ (pentacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=96$ (hexacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=97$ (heptacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=98$ (octacosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=99$ (enneicosagone), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.
Si $n=100$ (triaicosaénaire), il a au moins un angle aigu et un angle convexe.



RAPPEL : FORMULE AIRE TRIANGLE
 RECTANGLE : $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$
 FORMULE AIRE RECTANGLE :
 Base \times HAUTEUR
 Calculer ensuite l'aire d'un polygone
 P.TOTAL AIRE P.interieur P.bord
 P1-10 $\frac{3}{2} = 15$ 1 5
 P2-27 $3 \times 6 = 18$ 10 18
 P3-15 $\frac{12}{2} = 6$ 3 8

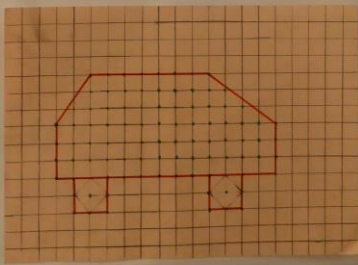
FORMULE DE PICK

Comment calculer l'aire d'un polygone avec ses sommets sur le quadrillage en comptant les points qu'il recouvre ?

$$P_i + \frac{P_b}{2} - 1$$

Deux triangles qui se partent un point ont
 la même aire. 2 fois polygone = 1 fois polygone
 qui sont tous 2 des carrés de polyg.
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
 Soit un rectangle, deux autres qui s'ajoutent
 la formule de Pick de P, et P, de P
 deux polygones
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
 $= P(A \cap B)$

P_b = périmètre du rectangle = $2L + 2l$
 $P_i = (L-1)(l-1) = L \cdot l - L - l + 1$
 $P_i + \frac{P_b}{2} - 1 = L \cdot l - L - l + 1 + \frac{2L + 2l}{2} - 1 = L \cdot l$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$