Université d'Aix-Marseille
Année 2016-2017

Autour de la convergence

Ces notes ont pour objectif de présenter les principaux aspects de la convergence au programme de l'agrégation pour aider à la synthèse attendue pour ce concours. Elles présentent une vision d'ensemble des problèmes usuels de convergence, sans toutefois nécessairement rechercher l'exhaustivité. De nombreux exemples issus de diverses théories sont présentés pour conforter la maîtrise de ces notions en vue de l'écrit et de l'oral. Des exercices sont aussi proposés dont certains de réflexion immédiate.

Toutefois, ces notes ne peuvent se substituer à l'utilisation d'ouvrages de référence.

Références possibles : Moisan-Vernotte, Queffélec-Zuily, Gourdon, Pommelet, Rudin, Dieudonné...

De prime abord, une série numérique ne semble qu'une suite particulière, et donc, l'étude de sa convergence ne devrait que se référer à la théorie générale de la convergence des suites. En fait, il s'avère (et il faut en être convaincu) que la théorie des séries est plus souple et fructueuse. A contrario, les séries sont utilisées dans l'étude de suites.

Les premières séries numériques apparaisssent très tôt dans l'histoire et leur considération est liée à la compréhension de la notion d'infini. Le parafoxe d'Achille et la tortue indique toute la difficulté d'appréhension de cette notion. Les arguments donnés dans l'étude des premières séries sont d'ordre géométrique ou philosophique. Un pas décisif a sans doute été atteint avec l'introduction des logarithmes par Neper au début du 17° siècle. Le développement du calcul différentiel et intégral amène progressivement à la notion de fonction et au développement en séries entières. La nécessité de préciser les notions de convergence apparaît donc, en particulier celle de préciser la définition de $\mathbb{R}$ [1] .

1. D'un point de vue historique, la première construction des réels est dûe à Dedekind vers 1860 qui définit les nombres réels comme les coupures des nombres rationnels.

Table des matières

Première partie

Un corps universel : R

Le corps des réels est au centre des mathématiques. Il peut être introduit par diverses méthodes et, à la fois, les questions de son existence et de son unicité se posent.

1 Caractérisations du corps des réels $\mathbb{R}$

Nous donnons les principales propriétés caractéristiques du corps des réels.

Théorème 1.1 *Il existe un corps totalement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure, c'est à dire que toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.*
Deux tels corps sont isomorphes, par un isomorphisme de corps ordonnés.

Bien évidemment, ce corps est appelé le corps des nombres réels et noté $\mathbb{R}$. Ce théorème assure, en autre, que chacun a le même $\mathbb{R}$.

D'autres caractérisations qui sont les propriétés usuelles sont :

Théorème 1.2 *Pours un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{K}$ possède la propriété de la borne supérieure.*
2. *Toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) converge.*
3. *$\mathbb{K}$ est archimédien*[2] *et toute suite de Cauchy converge.*
4. *$\mathbb{K}$ est archimédien et les suites adjacentes convergent.*
5. *Toutes suite bornée admet une sous-suite extraite convergente.*
6. *Les parties compactes sont les parties fermées bornées.*

Pour terminer, rappelons la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$:

Théorème 1.3 *Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$ et $\{0\}$ est soit dense soit discret et de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $(a > 0)$, appelé le générateur.*

2. C'est à dire : pour tout a>0, il existe un entier n tel que $1 < na$, ce qui est équivalent à dire que la suite de terme générale $1/n$ tend vers 0. Le corps des fractions rationnelles à coefficients réels est totalement ordonné mais non archimédien en considérant l'ordre défini par le quotient des termes de plus haut degré.

2 Constructions du corps des réels $\mathbb{R}$: un aperçu

Nous donnons quelques indications sur la conceptualité de deux principales constructions de $\mathbb{R}$.

2.1 Construction ensembliste : coupure de Dedekind

Cette construction est essentiellement ensembliste et repose sur la notion d'ordre. Elle repose sur la "remarque élémentaire" suivante : chaque nombre réel est la borne supérieure des rationnels qui lui sont strictement inférieurs, ce qui amène à poser :

Définition 2.1.1 Une coupure α est une partie de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. α est non vide et différente de $\mathbb{Q}$.
2. α contient tous les éléments inférieurs à l'un de ses éléments :

$$(\forall (r, s) \in \mathbb{Q}^2)/r < s \; (s \in \alpha) \Rightarrow (r \in \alpha).$$

3. α ne possède pas de plus grand élément.

Un exemple de coupure est l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à un rationnel donné (par exemple $\{0\}$) ! L'ensemble $\{r \in \mathbb{Q}/r^2 < 2\}$ est un autre exemple de coupure différent du type précédent.

Définition 2.1.2 $\mathbb{R}$ est l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$.

Définition 2.1.3 $\mathbb{R}$ est ordonné par l'inclusion.

Il est aisé de vérifier que cet ordre est total et que toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

II reste à définir les opérations pour mettre la structure de corps.

Définition 2.1.4 La somme des coupures α et β est définie comme $\{t \in \mathbb{Q}/\exists (r, s) \in \alpha \times \beta /t = r + s\}$.

Ainsi, l'opposée de la coupure α est $\{s \in \mathbb{Q}/\forall r \in \alpha, s < -r\}$.

Définition 2.1.5 Le produit des coupures positives α et β est définie comme $\{t \in \mathbb{Q}/\exists (r, s) \in \alpha^+ \times \beta^+ = /t \leq rs\}$. On étend ce produit à $\mathbb{R}$ par la règle usuelle des signes.

2.2 Construction analytique : complétion de $\mathbb{Q}$

Cette seconde construction est la complétion de $\mathbb{Q}$ et repose sur l'idée que les nombres réels sont les limites des suites de rationnels, donc des suites de Cauchy de rationnels, d'où l'introduction de l'anneau C (pour les opérations usuelles sur les suites) des suites de Cauchy de rationnels. Cet ensemble est aussi ordonné par l'ordre lexicographique. Par unicité (pré-supposée) de la limite, il faut identifier les suites de même limite, c'est à dire considérer le quotient de C par les suites de Cauchy tendant vers 0 d'où :

Définition 2.2.1 $\mathbb{R}$ est le quotient des l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels par l'idéal maximal (à vérifier)l des suites de Cauchy tendant vesr 0.

Cet ensemble étant un idéal maximal, le quotient est un corps. L'ordre passe au quotient, d'où la structure d'ordre total sur $\mathbb{R}$. Il faut vérifier la complétude (mais tout a été fait pour que ce soit vrai !).

Deuxième partie

Séries numériques

3 Propriétés générales des séries numériques

3.1 Définition d'une série

Formellement, une série est un couple de deux suites $((u_n)_n, (S_n)_n)$ reliées par la relation $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

u_n s'appelle le terme général et S_n la somme partielle de rang n.

Dans la pratique, on parle souvent de la série u_n ou de la série de terme général u_n.

Il est important de noter la relation : $u_n = S_n - S_{n-1}$ [3].

3.2 Définition d'une série convergente

Définition 3.2.1 La série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles converge.
La limite s'appelle la somme de la série et est notée $\sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k$.
La quantité $R_n = \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k - S_n$ s'appelle le reste d'ordre n. C'est la somme de la série dont les n+1 premiers termes sont 0.

3.3 Premiers exemples fondamentaux

3.3.1 Série annulante

On a $u_n = a_{n+1} - a_n$ où $(a_n)_n$ est une suite donnée.

La série converge si et seulement si la suite $(a_n)_n$ converge et la somme est la limite de cette suite.

3.3.2 Série géométrique

On a $u_n = u_0\rho^n$.
La série converge si et seulement si $|\rho| < 1$ et la somme est $\dfrac{u_0}{1-\rho}$.

3.3.3 Série harmonique

On a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Cette série diverge. En effet, comme $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$, la suite ne peut converger dans $\mathbb{R}$.

3. Toute cette section est valable dans un espace vetoriel normé

3.4 Propriétés algbriques

Théorème 3.1 *L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel et l'application somme est linéaire.*

3.5 Propriétés analytiques

Théorème 3.2 *Le terme général d'une série convergente tend vers* 0.

Démonstration : $u_n = S_n - S_{n-1}$, différence de suites convergentes vers la même limite.

Remarque : La série harmonique montre que cette condition de convergence du terme général n'assure pas nécessairement la convergence de la série.

La complétude de $\mathbb{R}$ se traduit par :

Théorème 3.3 *: Une série numérique est convergente si et seulement la suite des sommes partielles est de Cauchy.*

4 Séries numériques à termes positifs

Le fait que $\mathbb{R}$ soit totalment ordonnéet que que toute partie majorée ait une borne supérieure (ou ce qui est équivalent que toute suite croissante majoré est convergente) va donner une grande souplesse dans l'etude des séries positives. Une traduction simple est donnée par le critère suivant.

4.1 Critère fondamental

Le théorème suivant permet de donner exemples importants de convergence ou divergence de séries :

Théorème 4.1 *Une série numérique positive converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. La somme de la série est égale à la borne supérieure des sommes sommes partielles :* $\sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k = \sup_n S_n$.

Démonstration Dans $\mathbb{R}$ une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée et sa limite est égale à la borne supérieure de ses termes.

Pour une série à termes positifs u_n divergente (et uniquement pour celles-la), on se permet d'écrire $\sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k = +\infty$

4.2 Exemples fondamentaux

4.2.1 Séries de Riemann

Théorème 4.2 *La série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration Comme la suite $(S_n)_n$ est croissante, sa convergence est équivalente à celle de la suite extraite S_{2^n}, donc de la série annulante de terme général $S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$.

Comme, $\dfrac{2^{(1-\alpha)n}}{2} \leq S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \leq 2^{(1-\alpha)n}$, la convergence de la suite est équivalente à celle de la série géométrique de raison $2^{1-\alpha}$ soit à la condition $\alpha > 1$.

4.2.2 Séries de Bertrand

Théorème 4.3 *: La série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration Même processus (Voir aussi principe de condensation de Cauchy en exercice)

4.3 Comparaison des séries

4.3.1 La règle d'or

La souplesse dans l'utilisation des séries vient de la règle suivante :

Théorème 4.4 *Soient deux séries à termes positifs dont les termes généraux* u_n *et* v_n *vérifient* $u_n \leq v_n$ *à partir du rang* N_0 *(nous dirons pour presque tout n). Alors :*
- si $(v_n)_n$ *converge,* $(u_n)_n$ *converge.*
- si $(u_n)_n$ *diverge,* $(v_n)_n$ *diverge.*

Une autre formulation est :

Théorème 4.5 *: Soient deux séries à termes positifs de termes généraux* u_n *et* v_n*.*
a- Si $u_n = O(v_n)$*, la convergence de la série* $(v_n)_n$ *assure celle de la série* $(u_n)_n$*.*
b- Si $u_n \sim v_n$ *les deux séries sont de même nature.*

Une autre formulation est :

Théorème 4.6 *Soient deux séries à termes positifs de termes généraux* u_n *et* v_n *vérifiant presque partout :* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
a- La convergence de la série $(v_n)_n$ *assure celle de la série* $(u_n)_n$*.*
b- La divergence de la série $(u_n)_n$ *assure celle de la série* $(v_n)_n$*.*

4.3.2 Un exemple plus sophistiqué : série des inverses des nombres premiers

Nous proposons (par plaisir...) deux démonstrations de la divergence de la série des inverses des nombres premiers.

Théorème 4.7 *La série de terme général des inverses des nombres premiers diverge.*

Démonstration Démonstration analytique
Comme en 0, $\ln(\dfrac{1}{1-x}) \sim x$ la série considérée est de même nature que la série de terme général $\ln(\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}})$.
Il s'agit donc de démontrer que les sommes partielles de cette dernière série ne sont pas bornées, en application du critère fondamental.
Or $S_n = \log(\prod_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}})$ et $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \sum_{s_k=0}^{s_k=+\infty} \dfrac{1}{{p_k}^{s_k}}$.
Comme cette dernière série est à termes positifs, pour tout entier N $\prod_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq \prod_{k=1}^{k=n} \sum_{s_k=0}^{s_k=N} \dfrac{1}{{p_k}^{s_k}}$.
Cette expression est la somme de tous les entiers naturels dont la décomposition en nombres premiers ne contient que les n premiers entiers premiers à une puissance inférieure à N.

Pour conclure, utilisons la divergence de $\sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{k}$. Fixons un réel positif A et un entier m tel que $\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{k} > A$. Si on prend $n > m$ et $N > m$, on a $\prod_{k=1}^{k=n} \sum_{s_k=0}^{s_k=N} \frac{1}{{p_k}^{s_k}} \geq A$, d'où la conclusion.

Démonstration Démonstration arithmétique (dûe à Erdoss 1938)
Soit $(p_k)_k$ une énumération srtictement croissante de la suite des nombres premiers. Supposons que la série converge. Il existe un entier m tel que $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$.
Introduisons, pour chaque entier x, l'entier $N(x)$ égal au nombre des entiers inférieurs à x dont les seuls facteurs premiers sont les $p_1, p_2, ..., p_m$.
$N(x)$ vérifie l'encadrement : $\frac{x}{2} \leq N(x) \leq 2^m \sqrt{x}$. Cet encadrement donne une contradiction pour $x > 2^{2m+2}$.
Vérifions l'encadrement. $x - N(x)$ est le nombre d'entiers inférieurs à x divisible par l'un p_n avec $n \geq m + 1$. Comme le nombre d'entiers divisibles par p_n est au plus $\frac{x}{p_n}$, par partition, on a $x - N(x) \geq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x}{p_n}$.Le choix de m assure $\frac{x}{2} \leq x - N(x)$ soit $N(x) \geq \frac{x}{2}$.
Un entier q inférieur à x dont les seuls facteurs premiers sont les $p_1, p_2, ..., p_m$ s'écrit sous la forme kr^2 où k est sans carré. On a évidemment $r \leq \sqrt{x}$. Les seuls facteurs premiers de k étant aussi parmi les $p_1, p_2, ..., p_m$, il y a au plus 2^m choix possibles pour k. Par conséquent, $N(x) \leq 2^m \sqrt{x}$.

4.4 Critères

Une façon agréable (et utile mais à consommer avec modération) d'écrire le dernier théorème de comparaison est sa traduction en terme de critère qui n'est qu'une manière très simple de comparer une série donnée à une série de référence, à savoir une série géométrique ou une série de Riemann, voire de Bertrand.

4.4.1 Comparaison avec une série de géométrique

Théorème 4.8 *(Critère de d'Alembert). Soit $(u_n)_n$ une série à termes positifs.*
Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *la série converge.*
Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *la série diverge.*
Plus généralement
- Si $\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *la série converge.*
- Si $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *la série diverge.*

Théorème 4.9 *(Critère de Cauchy). Soit $(u_n)_n$ une série à termes positifs.*
- Si $\overline{\lim}\, {u_n}^{\frac{1}{n}} < 1$ *la série converge.*
- Si $\overline{\lim}\, {u_n}^{\frac{1}{n}} > 1$ *la série diverge.*

Remarque 4.4.1 Du fait que ces deux critères sont des comparaisons avec séries géométriques, ils sont relativement grossiers. Par exemple, pour le cas de divergence dans le critère de Cauchy, la suite tend vers l'infini, ce qui est cas évident de divergence.

4.4.2 Comparaison avec une série de Riemann

Théorème 4.10 *(Critère de Raabe-Duhamel). Soit $(u_n)_n$ une série à termes positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$.*
Si $\alpha > 1$, la série converge.
Si $\alpha < 1$, la série diverge.

Exemple : $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1. Un développement limité donne : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$: la série est divergente.

4.5 Sommation des relations de comparaison

La souplesse de la théorie des séries positives se retrouvent dans la sommation des relations de comparaisons que nous résumons en :

Théorème 4.11 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux séries à termes positifs. Si les termes généraux des deux séries sont comparables (O ou o ou $\sim$), alors :*
- s'il y a convergence, les restes sont comparables de la même façon.
- s'il y a divergence, les sommes partielles sont comparables de la même façon.

Démonstration Présentons tout d'abord la démonstration dans la situation d'équivalence et convergence des séries.
Soient A et B deux réels vérifiant $A < 1 < B$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ $Au_n \leq v_n \leq Bu_n$. En sommant, on obtient pour $n \geq N$ $AR_n(u) \leq R_n(v) \leq BR_n(u)$, ce qui signifie exactement l'équivalence des deux restes.
Présentons maintenant la démonstration dans la situation d'équivalence et divergence des séries.
Soient $\varepsilon > 0$, $A = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $B = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ $Au_n \leq v_n \leq Bu_n$. En sommant, on obtient pour $n \geq N$ $A(S_n(u) - S_N(u)) \leq S_n(v) - S_N(v) \leq B(S_n(u) - S_N(u)$, soit l'encadrement pour $n \geq N$ $A\frac{(S_n(u) - S_N(u)) + S_N(v)}{S_n(u)} \leq \frac{S_n(v)}{S_n(u)} \leq B\frac{S_n(u) - S_N(u)) + S_N(v)}{S_n(u)}$. Si n tend vers l'infini, les deux suites extrêmes tendent vers A et B. Il existe donc un nouvel entier N^* tel que pour $n \geq N^*$ $1 - \varepsilon \leq \frac{S_n(v)}{S_n(u)} \leq 1 + \varepsilon$, ce qui signifie exactement l'équivalence des deux sommes partielles.

4.5.1 Exemples

- Reste de la série des inverses des carrés des entiers :
$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n+1}$.

- Constante d'Euler γ :
$\ln(n+1) - \ln(n) \sim \frac{1}{n+1}$ donc (cas de divergence) $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1} \sim \ln(n+1)$.
On considère $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{2(n+1)^2}$ soit $\frac{1}{n+1} \sim u_n + \ln(n+1) - \ln(n)$ et en sommant, on obtient que la suite $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - Ln(n)$ converge. La limite est appelée la constante d'Euler.

- Recherche d 'un équivalent d'une suite itérative (un grand classique !) :

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ avec $0 < u_0 < 1$. Cette suite est décroissante positive convergente vers 0. On s'intéresse à trouver un équivalent du terme général.

Utilisant le développement limité du sinus en 0 et prenant la puissance σ on obtient que $u_{n+1}^\sigma - u_n^\sigma$ est équivalent à $-\frac{\sigma}{6}u_n^{\sigma+2}$. Le choix de $\sigma = -2$ donne que la série annulante de terme général $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ est équivalente à $\frac{1}{3}$ donc divergente. La somme partielle de rang n, c'est à dire u_{n+1}^{-2} est donc équivalente $\frac{n}{3}$. On a donc $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{3}}$.

5 Séries numériques absolument convergentes

Définition 5.0.1 Une série à termes complexes est absolument convergente si la série des modules est convergente.

L'intérêt est donné par :

Théorème 5.1 *Une série numérique absolument convergente est convergente.*

Démonstration Pour une série à termes réels,, on considère les parties positives et négatives de u_n : $u_n = u_n^+ - u_n^-$. On a $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. Les majorations $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ assurent la convergence de séries positives de terme général u_n^+ et u_n^-, donc par différence celle de la série de terme général u_n.

Pour une série à terme complexe, on considère les parties réelles et imaginaires.

5.1 Exemples

5.1.1 Séries entières

1. Lemme d'Abel : Soit $S(z) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} a_n z^n$ une série entière. S'il existe un z_0 non nul tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, la série entière converge pour tout z de module strictement inférieur à $|z_0|$.
2. Définiton du rayon de convergence :

   Définition 5.1.1 Le rayon de convergence de $S(z) = \sum_n a_n z^n$ est $\sup\{r \in \mathbb{R} \backslash \sup\{|a_n r^n| < +\infty\}\}$.

   C'est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
3. Règle d'Hadamard : $\rho(S) = \frac{1}{\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

5.1.2 Séries de Fourier

Les séries de Fourier fournissent des exemples intéressants de séries numériques absolument convergentes. Une première situation simple est :

Théorème 5.2 *La série des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^2 est absolument convergente.*

Démonstration Une double intégration par parties donne l'estimation : $\hat{f}(n) = O(1/n^2)$.

De même, l'inégalité de Bessel donne :

Théorème 5.3 *La série des coefficients de Fourier d'une fonction continue est de carré absolument convergente.*

Démonstration Cela découle tout simplement que la famille des $(e^{ikt})_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée, donc que $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace de dimension finie engendré par $(e^{ikt})_{\{|k|\leq n\}}$ et du théorème de Pythagore.

Ce dernier résultat permet d'obtenir une amélioration du théorème précédent :

Théorème 5.4 *La série des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^1 est absolument convergente.*

Démonstration Une intégration par parties donne l'égalité : $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}'(n)$ pour $n \neq 0$. On peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le théorème de Parseval est essentiel pour son résultat mathématique et historiquement :

Théorème 5.5 *Pour toute fonction f continue* $\sum_n |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$

Ce résultat est équivalent au fait que la famille $(e^{ikt})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$. La démonstration nécessite des arguments plus profonds, hors de notre propos immédiat.

6 Séries numériques semi-convergentes

La théorie des séries convergentes non absolument convergentes est plus délicate et fine : on retrouve cette différence entre les intégrales semi-convergentes et absolument convergentes.

6.1 Définition

On appelle série semi-convergente une série convergente non absolument convergente.

Un premier exemple important est donné par :

6.2 Critère des séries alternées

On appelle suite alternée uns suite dont le terme général s'écrit $u_n = (-1)^n |u_n|$.

Théorème 6.1 *Soit $(u_n)_n$ une suite alternée de nombres réels telle que la suite $(|u_n|)_n)$ est décroissante convergente vers 0.*
Sous ces conditions, la série de terme général u_n converge et, pour chaque entier n, on a l'encadrement de la somme : $S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k \leq S_{2n}$ *et l'estimation du reste :* $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration Les deux suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes donc convergentes de même limite.

6.3 Critère d'Abel

Le critère des séries alternées est très spécifique à $\mathbb{R}$ (à cause de l'ordre) et, en fait, un cas particulier de la méthode de sommation d'Abel qui s'avèrera très utile, par exemple, dans la théorie des séries trigonométriques et typique de la complétude.

Théorème 6.2 *Soient $(v_n)_n$ une suite complexe et $(\varepsilon_n)_n$ une suite de nombres de nombres réels vérifiant :*
- les sommes partielles de $(v-n)-n$ sont bornées - la suite $(\varepsilon_n)_n$ tend vers 0
- $\sum_{k=0}^{k=+\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| < +\infty$ (c'est le cas si la suite $(\varepsilon_n)_n$ est décroissante convergente vers 0).
Sous ces conditions la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ converge.

Démonstration Il suffit de démontrer que les sommes partielles de la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ forment une suite de Cauchy.
La démonstration repose alors sur la transformation d'Abel qui consiste à exprimer u_n en fonction des sommes partielles $\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k$ à savoir $v_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ (avec la convention $\sigma_{-1}) = 0$, équivalent à l'intégration par parties en théorie de l'intégration. On a donc :

$S_{n+m} - S_n = \sum_{k=n+1}^{k=n+m} \varepsilon_k(\sigma_k - \sigma_{k-1})$, puis en regroupant les termes en σ_k,

$S_{n+m} - S_n = \varepsilon_{n+m}\sigma_{n+m} - \varepsilon_{n+1}\sigma_n + \sum_{k=n+1}^{k=n+m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\sigma_k$, ce qui permet de majorer :

$|S_{n+m} - S_n| \leq |\varepsilon_{n+m}\sigma_{n+m}| + |\varepsilon_{n+1}\sigma_n| + \sum_{k=n+1}^{k=n+m-1} (|\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}||\sigma_k|$, soit avec la majoration de la suite $(\sigma_n)_n$:

$|S_{n+m} - S_n| \leq A\Big(|\varepsilon_{n+m} + |\varepsilon_{n+1}\sigma_n| + \sum_{k=n+1}^{k=n+m-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|\Big)$.

Il en découle que $\sup_m |S_{n+m} - S_n| \leq A\Big(\sup_m |\varepsilon_{n+m} + |\varepsilon_{n+1}\sigma_n| + \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|\Big)$.
La suite de droite tendant ves 0, la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy.

Exemple 1 La série de terme général $u_n = \dfrac{\exp(in\theta)}{n}$ converge pour chaque θ non multiple entier de π.

7 Comparaison séries et intégrales

La comparaison des séries et des intégrales est une outil naturel et très efficace, au coeur de la théorie analytique des nombres.

7.1 La méthode des rectangles

Une situation simple est la suivante, qui repose sur la méthode d'évaluation des intégrales par la méthode des rectangles.

Théorème 7.1 *Soit f une fonction positive décroissante sur* $]0, +\infty[$.
La série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Plus précisément, la suite de terme général $S_n - \int_0^n f(t)\,dt$ *converge dans* $\mathbb{R}+$.
On a les estimations suivantes :
- S'il y a convergence : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.
- S'il y a divergence : $\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq \int_0^n f(t)\,dt + f(0)$.

Démonstration Posons $e_n = S_n - \int_0^n f(t)\,dt$ et vérifions que cette suite est décroissante minorée.
$e_{n+1} - e_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq 0$ par minoration de l'intégrale grâce à la décroissance de f. D'autre part, $e_n \geq 0$ car $e_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt\right) + f(n)$, somme de réels positifs.

Corollaire 7.1 Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_n^{+\infty} f(t)dt \sim \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt$, $R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$

Corollaire 7.2 Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge et $\int_0^n f(t)\,dt \sim \int_0^{n+1} f(t)\,dt$, $S_n \sim \int_0^n f(t)\,dt$.

7.2 Exemples

7.2.1 Séries de Riemann et Bertrand

Une autre approche.

7.2.2 Equivalents de sommes

Constante d'Euler γ $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Un calcul : $\ln(2) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
Puisque $S_{2n} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2k+2}$. La seconde somme (demi-somme des pairs inférieurs à $2n$) est $\frac{1}{2}(\ln(n) + \gamma) + o(1)$ et la seconde est alors $\ln(2n+1) - \ln(n) + \frac{1}{2}\gamma + o(1)$, d'où le résultat.

Un développement asymptotique $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$+Constante+o(1).

7.3 Une amélioration

L'idée d'évaluation du terme général par la méthode des rectangles doit être poursuivie sans l'hypothèse de décroissance. On obtient :

Théorème 7.2 *Soit f une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ converge.*
La série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Plus précisément, la suite de terme général $S_n - \int_0^n f(t)\,dt$ converge dans $\mathbb{R}$.

Démonstration On a $|\int_k^{k+1} f(t)dt - f(k)| \leq \int_k^{k+1} |f'(t)|\,dt$ car $\int_k^{k+1} f(t)\,dt - f(k) = \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)\,dt$ par intégration par partie. La série de terme général $\int_k^{k+1} |f'(t)|\,dt$ étant convergente, les deux séries de termes généraux $f(n)$ et $\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ sont de même nature. Il suffit donc de vérifier que la série de terme général $\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ et l'intégrale sont de même nature.
Si l'intégrale converge, c'est immédiat. Réciproquement, on a pour tout x, $|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{E(x)} f(t)dt| \leq \int_{E(x)}^x |f'(t)|\,dt \leq \int_{E(x)}^{+\infty} |f'(t)|\,dt$. Comme cette dernière intégrale tend vers 0 si x tend vers $+\infty$, la conclusion suit immédiatement.

7.3.1 Exemples

- la série de terme général $u_n = \dfrac{\exp(i\sqrt{n})}{n}$ converge.
- la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(\ln(n))}{n}$ diverge.

7.4 La méthode des trapèzes

L'utilisation de la méthode des rectangles peut paraître grossière et il est naturel de vouloir utiliser une méthode plus fine, comme par exemple, celle des trapèzes qui repose sur la proposition suivante :

Proposition 7.1 Une fonction f de classe C^2 sur $[a, a+1]$ vérifie la relation :
$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \frac{1}{2}(f(a) + f(a+1)) - \frac{1}{2}\int_a^{a+1} (t-a)(a+1-t)f''(t)dt.$$

Démonstration Intégration par parties astucieuse.

7.4.1 Exemples

Somme de logarithmes

Théorème 7.3 *Il existe une constante réelle positive C tel que pour tout entier N :*
$$\sum_{k=1}^{k=N} \ln(k) = N(\ln(N) - 1) + \frac{1}{2}\ln(N) + C + 0(\frac{1}{N}).$$

Démonstration En appliquant la proposition précédente à la fonction logarithme entre k et $k+1$ $\int_k^{k+1} ln(t)\,dt = \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) + \frac{1)}{2}\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^2}dt$ et en sommant entre 1 et $N-1$:
$$\ln(N!) = N(\ln(N) - N) + \frac{1}{2}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=1)}^{k=N}\int_k^{k+1} (t-k)(k+1-t)\frac{1}{t^2}dt.$$
La somme de droite représente les sommes partielles d'une série positive en $O(\frac{1}{N^2})$ donc convergente ; le reste est donc $O(\frac{1}{N})$.

La formule de Stirling

Corollaire 7.3 La formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi}\exp(-n)n^{n+\frac{1}{2}}$.

On prend l'exponentielle dans l'estimation précédente pour obtenir $n! \sim \exp(C)\exp(-n)n^{n+\frac{1}{2}}$.
La valeur de la constante se calcule tradionnellement par les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^\pi \sin^n(t)\,dt$.
Une intégration par partie assure la relation de récurrence $W_{n+1} = \frac{n-1}{n}I_n$. Il en résulte un calcul explicite de I_n suivant la parité de n : $W_{2n} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\pi$ et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(n+1)!}$.
Comme la suite des intégrales est décroissante et le quotient $\frac{n+2}{n}$ tend vers 1 si n tend vers l'infini, le quotient $\frac{2n+1}{2n}$ tend aussi vers 1. Nous avons aussi un équivalent de ce quotient par l'equivalence déjà établie, à savoir d'où la valeur $\exp(C) = (2\pi)$.

Faisons remarquer que W_{2n} se calcule aussi directement en linéarisant(formule du binôme avec $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ et on trouve $W_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\pi$.

8 Regroupement de termes ; sommation par paquets

En général, la série obtenue en regroupant des termes d'une série donnée peut avoir une nature différente de la série initiale puisque les nouvelles sommes partielles ne forment pas une suite extraite des sommes initiales. Il faut donc évaluer la différence, ce que formalise le résultat suivant :

Théorème 8.1 *Soit Φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\Phi(0) = 0$.*
Soit $(u_n)_n$ une suite telle que :
1-La série de terme général $v_n = \sum_{k=\Phi(n)}^{k=\Phi(n+1)-1} u_k$ converge.
2-La suite de terme général $\delta_n = \sum_{k=\Phi(n)}^{k=\Phi(n+1)-1} |u_k|$ converge vers 0.
Sous ces conditions, la série $(u_n)_n$ converge et a la même somme que $(v_n)_n$.

Démonstration Pour chaque entier n soit n^* l'unique entier k tel que $\Phi(k) \leq n < \Phi(k+1)$.
On a alors $|S_n(u) - S_{n^*}(v)| \leq \delta_{n^*}$ et lorsque tend n tend vers l'infini, n^* d'où la convergence annoncée.

Lorsque la série est termes positifs, la seconde condition est automatiquement vérifiée. Un autre cas simple est la situation dans laquelle les paquets sont de longueur bornée (i.e la suite $\Phi(n+1) - \Phi(n)$) est bornée.

8.0.2 Exemples

1. $\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge car en regroupant deux termes consécutifs on obtient un $O(\frac{1}{n^2})$ et le terme général tend vers 0.

2. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

   Démonstration Pour que le terme général tende vers 0, il faut $\alpha > 0$ et il y a convergence absolue pour $\alpha > 1$.

   On regroupe les termes par paquets à partie entière constante, c'est à dire on introduit $v_n = \sum_{k=n^2}^{k=(n+1)^2-1} u_k$. On

alors l'encadrement : $\frac{2n}{(n+1)^{2\alpha}} \leq |v_n| \leq \frac{2n}{n^{2\alpha}} = \frac{2}{n^{2\alpha-1}}$.
Une condition nécessaire (les sommes partielles forment une suite de Cauchy) de convergence est que $(v_n)_n$ tende vers 0, donc $\alpha > \frac{1}{2}$.
L'inégalité sur v_n peut être réécrite en : $|v_n| = \frac{2}{n^{2\alpha-1}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$, ce qui donne $v_n = \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha-1}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$. La série converge donc comme somme de deux séries convergentes pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

9 Changement de l'ordre d'indexation

On s'interesse au changement de variable sur l'ensemble d'indexation $\mathbb{N}$.

Théorème 9.1 *Soit $(u_n)_n$ une série absolument convergente.*
Pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et de même somme.

Démonstration Pour la convergence, il suffit de traiter le cas des séries positives et de démontrer que la suite des sommes partielles de v est majorée. Or $S_n(v) \leq S_N(u)$ en appelant N un entier tel que $\sigma([0,n]) \subset [0,N]$ donc $S_n(v) \leq S(u)$, ce qui assure la convergence et la majoration $S(v) \leq S(u)$. Appliquant ce résultat avec v et σ^{-1}, on obtient l'égalité des sommes.

Pour une série absolument convergente, on utilise la décomposition $u = u^+ - u^-$.

10 Séries doubles

Les suites à deux indices sont fréquement rencontrées (indexation sur $\mathbb{N}^2$ par exemple). Une difficultté majeure est la perte de l'ordre.

10.1 Définition

Définition 10.1.1 Soit $(u_{n,m})_{n,m}$ une suite double de nombres complexes. La série double $u_{n,m}$ est absolument sommable (ou convergente) si $\sup_{A \subset \mathbb{N}^2 \, fini} \sum_{(n,m)\in A} |u_{n,m}| < +\infty$.

10.2 Exemples

- $u_{n,m} = a^{n+m}$ pour $|a| < 1$.

- $u_{n,m} = a^{nm}$ pour $|a| < 1$.

La définition ci-dessus est équivalente à dire que si σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

10.3 Somme

La définition ci-dessus est équivalente à dire que si σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, la série de terme gnéral $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et le résultat sur le changement d'ordre pour les séries absolument convergente nous permet d'introduire :

Définition 10.3.1 Soit $u_{n,m})_{n,m}$ une série double de nombres complexes absolument convergente. Sa somme est égale à $\sum_n u_{\sigma(n)}$ où σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

Cette somme est caractérisée par :

Proposition 10.1 S est la somme de la série double de terme général $u_{n,m})_{n,m}$ absolument convergente si et seulement pour chaque réel $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie A de $\mathbb{N}^2$ telle que pour toute partie finie B contenant A $|\sum_{(n,m)\in B} u_{n,m} - S| < \varepsilon$.

10.4 Un théorème essentiel : Fubini

Le résultat essentiel (et bien pratique) est le théorème de Fubini.

Théorème 10.1 *Soit $(u_{n,m})$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n=0}^{n=+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{m=+\infty}|u_{n,m}|\Big) < +\infty$. Sous cette condition :*

1. *Pour chaque entier n, la série de terme général $(u_{n,m})_m$ est convergente de somme notée U_n.*
2. *Pour chaque entier m, la série de terme général $(u_{n,m})_n$ est convergente de somme notée V_m.*
3. *La série de terme général U_n est convergente.*
4. *La série de terme général V_m est convergente.*
5. *On a $\sum_{n=0}^{n=+\infty} U_n = \sum_{m=0}^{m=+\infty} V_m$, c'est à dire : $\sum_{n=0}^{n=+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{m=+\infty} u_{n,m}\Big) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_{n,m}\Big)$.*
6. *La somme de la série double est égale à $\sum_{n=0}^{n=+\infty} U_n$.*

10.5 Exemples

1. $u_{n,m} = \dfrac{1}{(n+m)^a}$ pour $a > 2$.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(n+t)^a}$ étant décroissante, la somme $\sum_{n=0}^{n=+\infty}\dfrac{1}{(n+m)^a}$ est inférieure à $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{(n+t)^a}\,dt$ soit $\dfrac{1}{a-1}\dfrac{1}{(n+1)^{a-1}}$. Cette dernière série est convergente pour $a > 2$.

2. Analyticité d'une série entière

   Un résultat important :

   Théorème 10.2 *: Une série entière est analytique sur son disque de convergence. Plus précisément, si S est une série entière et a un point du disque de convergence, la série de Taylor de S en a converge sur $D(a, \rho(S) - |a|)$ vers $S(z)$.*

   Démonstration On a $\dfrac{S^{(p))}(z)}{p!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{p}a_n z^{n-p}$ et la série de Taylor s'écrit donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{p}a_n a^{n-p}\Big)(z-a)^p$. Aussi, nous sommes en présence d'un problème de permutation de deux sommes. Une condition suffisante pour permuter est que la série double des modules soit convergente. Considérons donc la série double de terme général $u_{n,p} = \binom{n}{p}|a_n z^{n-p}|$ et montrons qu'elle converge en vérifiant que la somme "double" $\sum_n(\sum_p u_{n,p})$ est finie. Si n est fixé, la sommation sur p ne porte que sur les termes $p \le n$ et il n'y a donc aucun problème de convergence de la série. De plus, nous reconnaissons la formule du binôme et pouvons donc calculer sa somme : $\sum_p u_{n,p} = (|a| + |z - a|)^n$.

Nous étudions donc maintenant la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|a| + |z - a|)^n$. Cette série converge pour z dans le disque ouvert $D(a, \rho(S) - |a|)$ puisque pour un tel z, $(|a| + |z - a|)^n < \rho(S)$. Par conséquent, $\sum_n(\sum_p u_{n,p})$ est finie et nous pouvons écrire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{S^{(p))}(a)}{p!}(z-a)^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{n}{p}a_n z^{n-p}\Big)$. Le résultat énoncé est établi, en remarquant que l'on est, une nouvelle fois, en présence de la formule du binôme.

11 L'espace l^1

Nous considèrons l'espace vectoriel l^1 des séries numériques absolument convergentes.

11.1 La complétude de l^1

Théorème 11.1 *L'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une norme sur l^1.*

On note $||u||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Théorème 11.2 *l^1 muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

Démonstration Soit $u^{(p)}$ une suite de Cauchy d'éléments de l^1.
Soit n un entier fixé. Comme pour chaque u de l^1 et chaque entier n $|u_n| \leq ||u||$, la suite $u_n^{(p)}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente, de limite notée u_n.

Vérifions que la suite u est la limIte dans l^1 de la suite $u^{(p)}$.
- u appartient à l^1. La suite $u^{(p)}$ étant une suite de Cauchy, la suite $||u^{(p)}||_1$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une constante A tel que pour chaque p $\sum_{n=0}^{n=+\infty} |u_n^{(p)}| \leq A$.

Par conséquent,si N est un entier, pour chaque p $\sum_{n=0}^{n=N} |u_n^{(p)}| \leq A$. En passant à limite sur p, pour chaque entier n $\sum_{n=0}^{n=N} |u_n^{(p)}| \leq A$. Les sommes partielles de la série des modules de u sont donc majorées par A, ce qui montre que u est bien une série absolument convergente donc appartient à l^1.
- Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. $u^{(p)}$ étant une suite de Cauchy, il existe un entier P tel que pour $p \geq P$ et chaque entier q $||u^{(p+q)} - u^{(p)}||_1 \leq \varepsilon$. Par conséquent pour chaque entier N $\sum_{n=0}^{n=N} |u_n^{(p+q)} - u_n^{(p)}| \leq ||u^{(p+q)} - u^{(p)}||_1$ soit $\sum_{n=0}^{n=N} |u_n^{(p+q)} - u_n^{(p)}| \leq \varepsilon$ et donc en faisant tendre q vers l'infini $\sum_{n=0}^{n=N} |u_n - u_n^{(p)}| \leq \varepsilon$ pour tout entier $p \geq P$. N étant indépendant de p, en le faisant tendre vers l'infini $\sum_{n=0}^{n+\infty} |u_n - u_n^{(p)}| \leq \varepsilon$ soit $||u - u^{(p)}||_1 \leq \varepsilon$, d'où la convergence dans l^1 de $(u^{(p)})_p$ vers u.

11.2 La convergence dans l^1

Comme nous avons un espace de Banach, il est important de bien comprendre la convergence dans cet espace. Le résultat clef est :

Théorème 11.3 *(Règle de Weierstrass ou convergence dominée)*
Soit $(u^{(p)})_p$) une suite de séries absolument convergentes. On suppose :
1- Pour chaque entier n $a_n = \lim_{p\to+\infty} u_n^{(p)}$ existe.
2- Il existe une série absolument convergente $(M_n)_n$ telle que pour chaque p $|u_n^{(p)}| \leq M_n$.
Alors :
1- La série $(a_n)_n$ est absolument convergente.
2- $|\sigma_p - \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n|$ tend vers 0 si p tend vers l'infini.
3- En particulier $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n^{(p)} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n$.

Démonstration En passant à la limite dans 2-, on obtient :$|a_n| \leq M_n$. Ainsi la série de terme général est absolument convergente.
Posons $\sigma_p = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n^{(p)}$ et estimons la différence $\delta_p = |\sigma_p - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n|$.
Pour chaque entier N,on a : $|\sigma_p - \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{n=N} |u_n^{(p)} - a_n| + 2\sum_{n=N+1}^{n=+\infty} M_n$ donc $\overline{\lim}\,\delta_p \leq 2\sum_{n=N+1} M_n$.
En faisant tendre N vers l'infini, obtient que $\overline{\lim}\,\delta_p = 0$, d'où le résultat.

11.3 Exemples

11.3.1 L'exponentielle

Théorème 11.4 *: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n = \exp(z)$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$.*

Démonstration Par la formule du binôme : $(1+\frac{z}{n})^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}$.

On pose $u_n^{(p)} = \binom{n}{p}\frac{z^k}{n^k}$ et la règle s'applique immédiatement car successivement :
- $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \frac{z^k}{k!}$
- $|\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}| \leq \frac{|z^k|}{k!}$.
- La série de terme général $\frac{|z^k|}{k!}$ est absolument convergente.

La convergence uniforme s'obtient en considérant la borne supérieure pour $|z| \leq R$.

A titre d'exercice on pourra montrer que la relation reste vraie si z est remplacer par une matrice.

11.3.2 La cotangente

Théorème 11.5 *Pour tout complexe z de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$: $\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{z-n}$ avec convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration Par définition $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{z}{2in})^{2n} + (1-\frac{z}{2in})^{n}}{(1+\frac{z}{2in})^{2n} - (1-\frac{z}{2in})^{2n}}$.

L'expresssion ci-contre est une fraction rationnelle R_n dont les pôles sont simples égaux à $2n\tan(\frac{2k\pi}{n})$ $(-n \le k \le n)$ (remarquer que R_n est impaire et de degré 1). La décomposition en éléments simples donne :
$R_n(z) = \frac{z}{4n^2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\cos^2(\frac{k\pi}{n})} \frac{2z}{z^2 - (2n\tan^2(\frac{k\pi}{n}))}$.
La règle de Weierstrass s'applique car $\left|\frac{1}{\cos^2(\frac{k}{2n})} \frac{2z}{z^2 - 2n\tan^2(\frac{k}{2}n)}\right| \le \frac{2|z|}{k^2 - |z^2|}$.
Cette inégalité d'ecoule de $\left|\frac{1}{\cos^2(\frac{k}{2n})} \frac{2z}{(z^2 - 2n\tan^2(\frac{k}{2}n)}\right| = \frac{2|z|}{|4n^2\sin^2(\frac{k}{2n}) - z^2\cos^2(\frac{k}{n})|}$
et $\left|4n^2(\sin^2(\frac{k}{2n}) - z^2\cos^2(\frac{k\pi}{2n})\right| \ge k^2 - |z|^2$ car $\sin(x) \ge \frac{2}{\pi x}$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

11.4 La convolution

La convolée de deux suites et la suite qui apparaît dans le produit de deux séries entières. Elle est appelée par certains produit de Cauchy.

11.4.1 Définition

Définition 11.4.1 Soient a et b deux suites. La suite c définie par $c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_{n-k}b_k$ est appelée la convolée de a et b.

Il faut remarquer que cette opération de convolution est bilinéaire.

11.4.2 La convolution des séries absolument convergentes

Théorème 11.6 *Soient a et b appartenant à l^1. La suite c définie par $c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_{n-k}b_k$ appartient à l^1 et vérifie $||c||_1 \le ||a||_1||b||_1$. De plus $\sum_{k=0}^{k=+\infty} c_n = \sum_{k=0}^{k=+\infty} a_n \times \sum_{k=0}^{k=+\infty} b_n$*

Démonstration Considérons tout d'abord des séries à termes positifs. Il est immédiat que $S_N(c) \le S_N(a) \times S_N(b) \le S_{2N}(c)$. La première inégalité assure que, pour chaque entier N, $S_N(c) \le S(a) \times S(b)$ donc la série de terme général c_n est convergente de somme inférieure à $S(a) \times S(b)$ et le seconde assure que cette même somme est supérieure à $S(a) \times S(b)$.
Pour les séries de signe arbitraire, on utilise la bilinéarité de la convolution et la décomposition de a et b en parties positives et négatives qui sont absolument convergentes.

11.4.3 La convolution des séries convergentes

Nous venons de considérer deux séries absolument convergentes. Il est naturel d'étudier la situation plus générale de séries convergentes. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 11.7 *(Maertens) Soient a et b deux séries convergentes de somme A et B, et c la suite définie par* $c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_{n-k} b_k$.
1- Si a et b sont absolument convergentes c est absolument convergente de somme A.B.
2- Si a est absolument convergente et b est convergente, c est convergente de somme A.B.
3- Il existe des séries convergentes telles que la suite c ne converge pas vers 0.
4- Si la série c converge, sa somme est A.B.

Démonstration L'assertion 1 est le théorème précédent.
L'assertion 2 est un peu plus subtile est repose sur la sommation d'Abel. Quitte à remplacer b_0 par $b_0 - B$, on peut supposer que la somme de b est nulle.
Nous évaluons la somme partielle $C_n = \sum_{k=0}^{k=n} c_k$. Posant $B_n = \sum_{k=0}^{k=n} b_k$ pour $n \geq 0$ et $B_{-1} = 0$ de sorte que $b_n = B_n - B_{n-1}$, on a, par la sommation d'Abel $C_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k B_{n-k}$.
Fixons un entier N. On a pour $n \geq N$ $|C_n| \leq \sum_{k=0}^{k=N} |a_k||B_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{k=n} |a_k||B_{n-k}|$. Il en découle la majoration $|C_n| \leq \sup_{k \leq N} |B_{n-k}| \sum_{k=0}^{k=N} |a_k| + \sup_{k \in \mathbb{N}} |B_k| \sum_{k=N+1}^{k=\infty} |a_k|$.
Le membre de droite tendant vers $\sup_{k \in \mathbb{N}} |B_k| \sum_{k=N+1}^{k=\infty} |a_k|$ si n tend vers l'infini, on a $\overline{\lim} |C_n| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |B_k| \sum_{k=N+1}^{k=\infty} |a_k|$.
En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\overline{\lim} |C_n| \leq 0$; la suite positive $|C_n|$ converge donc vers 0.

Pour l'assertion 3, on peut prendre $a = b$ avec $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ puisque $|c_n| \geq= \dfrac{1}{2}$ (Utiliser $n(n-k) \leq \dfrac{n^2}{4}$).

Pour l'assertion 4, introduisons les trois séries entières $A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, $B(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$,$C(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$.
Comme les trois suites a, b, c tendent vers 0, leurs rayons de convergence sont supérieurs à 1. De plus, on a $C(t) = A(t)B(t)$.
Comme les trois séries a, b, c sont convergentes, le théorème d'Abel assure que les limites en 1 de $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ existent et sont égales à A, B, C. L'unicité de la limite assure maintenant le résultat énoncé.

Troisième partie

Séries dans les espaces normés

Les généralités vues en tout début pour les séries numériques restent valables. Toutefois, les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ n'opèrent plus. Il convient donc d'utiliser les propriétés spécifiques de X.

11.5 Séries normalement convergentes

11.5.1 Définition

Il est naturel de remplacer la valeur absolue par la norme, ce qui amène à poser :

Définition 11.5.1 Une série est normalement convergente si la série des normes est convergente.

11.5.2 Complétude et séries

Le question immédiate qui se pose est de savoir si à partir d'une série normalement convergente il est possible de définir un élément de X.

Exemple : Soit X l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$ et soit la série de terme général $f_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

Cette série est normalement convergente. Toutefois, elle ne converge pas dans X. En effet, pour chaque $t \neq 1$ $S_n(t)$ converge vers $-\ln(1-t)$ et cette convergence est aussi uniforme sur chaque intervalle $[0,a]$. Par conséquent la somme de la série sur $[0,a]$ ne peut être que la fonction $-\ln(1-t)$. Aussi si la série convergeait dans l'espace considéré sa limite qui serait une fonction continue sur $[0,1]$(Cf. théorème à venir : une limite uniforme de fonctions continues est continue) devrait coïncider sur $[0,1[$ avec $-\ln(1-t)$ donc en serait un prolongement par continuté en 1, ce qui ne peut être le cas, cette fonction tendant vers $+\infty$.

Cet exemple montre qu'une connaissance précise de X est nécessaire.

Une réponse à la question initiale est donnée par :

Théorème 11.8 *Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration Si X est complet, il suffit de démontrer que les sommes partielles sont de Cauchy. Or, comme $\|S_{n+m} - S_n\| \leq \displaystyle\sum_{n+1}^{n+m} \|u_k\|$ soit $\displaystyle\sup_m \|S_{n+m} - S_n\| \leq \sup_m \sum_{n+1}^{n+m} \|u_k\|$. Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse, ce qui assure que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy. Inversement soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de X et posons $u_n = x_{n+1} - x_n$. Comme la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe une suite extraite $(v_n = u_{\sigma(n)})_n$ de $(u_n)_n$ telle que $\|u_n\| < \dfrac{1}{2^n}$. La série de terme général v_n est donc normalement convergente, donc convergente par hypothèse. En considérant les sommes partielles,on obtient : $\displaystyle\sum_0^n v_k = x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(0)}$ et donc la suite $(x_{\sigma(n)})_n$ converge. Ainsi la suite de Cauchy $(x_n)_n$ admet une suite extraite convergente, donc est convergente et X est bien complet.

Exemple : Exponentielle d'une matrice.
La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge normalement dans l'espace complet $M_n(\mathbb{C})$. Sa somme est appelée l'exponentielle de A et est notée $\exp(A)$. Si $A = \lambda I_n$, on a $\exp(A) = \exp(\lambda) I_n$.

11.5.3 Un cas particulier : Convergence dans $L^1(\mu)$

Ce dernier résultat semble peu utile. En fait, il est souvent utilisé pour établir la complétude de $L^1(\mu)$ (μ mesure positive). Cette complétude de $L^1(\mu)$ est un résultat essentiel. Sa démonstration repose souvent sur le théorème, conséquence du théorème de convergence monotone, très utile suivant :

Théorème 11.9 *(Petit Fubini) Soient μ une mesure positive sur Ω et (f_n) une suite de fonctions μ-intgrables telles que $\sum_0^{+\infty} \int_\Omega |f_n|\, d\mu < +\infty$.*
Sous ces conditions :
1- la série $\sum_0^{+\infty} f_n(w)$ converge absolument pour μ-presque tout w.
2- la fonction $S\,:\, w \mapsto \sum_0^{+\infty} f_n(w)$ est μ-intégrable.
3- $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |S(w) - \sum_0^{+\infty} f_k(w)|\, d\mu(w) = 0$.
En particulier $\int_\Omega \sum_0^{+\infty} f_n(w)\, d\mu(w) = \sum_0^{+\infty} \int_\Omega f_n(w)\, d\mu(w)$.

11.5.4 Retour sur l^1

Le résultat précédent s'appliquant à la mesure de dénombrement sur $\mathbb{N}$, on retrouve le théorème dit de Fubini pour les séries doubles. Cela peut convaincre un lecteur sceptique sur l'utilité de ce dernier résultat sur les permutations de séries et sur le lien nécessaire à faire entre les séries absolument convergentes et la théorie de l'intégration.

11.6 Séries semi-convergentes

La convergence normale ne doit être vue que comme un critère de convergence. Il est relativement grossier. Le théorème suivant (dû à d'Abel) reposant sur la sommation d'Abel est un autre critère plus fin.

Théorème 11.10 *Soient X un espace de Banach, $(v_n)_n$ une suite de l'espace de X dont les sommes partielles sont bornées par M et $(\varepsilon_n)_n$ une suite de nombres de nombres complexes tendant vers 0 telle que $\sum_{k=0}^{k=+\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| < +\infty$ (c'est le cas si la suite $(\varepsilon_n)_n$ est décroissante convergente vers 0).*

Sous ces conditions, la série de terme général $\varepsilon_n u_n$ converge et deplus, on a l'estimation du reste :

$$||R_n|| \leq M\Big(\varepsilon_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|\Big)$$

Exemples : - $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

- Soit (a_n) une suite décroissante vers 0. La série $\sum_0^{+\infty} a_n \exp(int)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

En effet les sommes partielles des exponentielles $\exp(int)$ sont bornées sur tout intervalle fermé borné inclus dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Quatrième partie

Suites et séries de fonctions

Nous venons de voir la convergence dans les espaces normés ; Les critères abordés sont relativement grossiers. Il est souhaitable de mieux connaître la structure des espaces considérés. Cela nous amène à préciser les modes de convergences.

12 Définitions des convergences

Nous rappelons quelques diffèrentes notions de convergence.

12.1 Convergence simple

Soient X un ensemble et Y un espace métrique. La suite $(f_n)_n$ d'applications de X dans Y converge simplement vers l'application f si pour chaque élément x de X la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

12.1.1 Un exemple important : séries de Fourier

Un exemple important de convergence simple est donné, dans le cadre des séries de Fourier, par le théorème de Dirichlet :

Théorème 12.1 *Si f est C^1 par morceaux, pour tout x $\lim_n S_n(f(x)) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$.*

Etablissons rapidement un résultat plus faible mais très utile :

Théorème 12.2 *Soit f une fonction continue par morceaux 2π périodique. Sa série de Fourier en x converge vers $f(x)$ si x est un point de différentiabilité de f.*

Démonstration La série de Fourier en x s'écrit $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(x-t) - f(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin(\frac{(2N+1)t}{2})\, dt$. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(x-t) - f(t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ est continue. Le lemme de Riemann-Lebesgue permet de conclure immédiatement.

Une application immédiate à la fonction $\cos(\pi\alpha t)$ ou $\exp(\pi\alpha t)$ donne le développement classique de la cotangente :
$\cot(\pi\alpha) = \lim_N \displaystyle\sum_{n=-N}^{n=+N} \frac{1}{\alpha - n}$ soit encore $\cot(\pi\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} + 2\alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.

12.2 Convergence uniforme

Soient X un ensemble et Y un espace métriq ue. La suite $(f_n)_n$ d'applications de X dans Y converge uniformément vers l'application f si la suite de terme général $\sup_X d(f_n(x), f(x))$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

12.2.1 Un exemple important : séries de Fourier

Les séries de Fourier fournissent des exemples importants de convergence uniforme :

Théorème 12.3 *Les moyennes de Césaro d'une fonction 2π-périodique continue converge uniformément vers cette fonction.*

12.3 Convergence normale

Le ritère de converegnce normale déjà vu dans les espaces de Banach s'écrit dans le cas des applications continues :

Définition 12.3.1 Une série d'applications continues de X à valeurs dans l'espace normé Y est normalement convergente si la série $\sum_{k=0}^{k=+\infty} \sup_x \|f_n(x)\|$ est convergente i.e $\sum_{k=0}^{k=+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty)$.

12.3.1 Un exemple important : séries de Fourier

Un théorème simple est :

Théorème 12.4 *La série de Fourier d'une fonction de classe C^1 converge normalement vers la fonction.*

Démonstration La série des coefficients de Fourier est absolument convergente et la fonction et la série de Fourier ont les mêmes coefficients de Fourier.

12.4 Convergence dans $L^1(\mu)$

Définition 12.4.1 La suite $(f_n)_n)$ converge vers f dans $L^1(\mu)$ si la suite numérique $(\int |f_n - f|\, d\mu)_n$ tend vers 0.

12.5 Convergence presque sûre

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$un espace probabilisé. La suite de v.a.r $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire X si l'événement $\{\omega\ X_n(\omega) \to X(\omega)\}$ est de probabilité égale à 1.

12.6 Convergence en probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. La suite de v.a.r $(X_n)_n$ converge en probabilités vers la variable X si pour tout réel $\lambda > 0$ $P(|X_n - X| > \lambda)$ tend vers 0.

12.7 Convergence en loi

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. La suite de v.a.r $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable X si la suite $(F_n)_n$ des fonctions de répartition de la suite $(X_n)_n$ converge simplement vers la fonction de répartition F de X en tout point de continuité de F.

13 Conservation des propriétés

De manière tout à fait générale, il serait vain de ne considérer que la convergence qu'en elle-même : il est fondamental de connaître les propriétés analytiques conservées par ces convergences (rappel : nous sommes en analyse !).

13.1 Convergence simple

Dans le cadre de la convergence simple, citons quelques exemples :

Théorème 13.1 *Une limite simple de fonctions croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle est croissante (resp. décroissante).*

Théorème 13.2 *Une limite simple de fonctions convexes sur un intervalle est convexe.*

13.2 Convergence uniforme

Nous étudions la convergence uniforme et donnons les principaux résultats concernant la continuité, l'intégrabilité, la différentiabilité et l'holomorphie.

Commençons par donner des critères de convergence uniforme :

Théorème 13.3 *(Critère de Cauchy) Supposons Y complet. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme, c'est à dire si et seulement si la suite de terme général* $\sup_m \sup_X d(f_n(x), f_m(x)$ *converge vers* 0.

Théorème 13.4 *(Normalité)Soit Y une space vectoriel normé complet. Une série normalement convergente de fonctions continues de X dans Y est uniformément convergente. En particulier sa somme est une application continue de X dasn Y.*

Il faut donc voir la convergence normale comme critère de convergence uniforme !

Démonstration Il suffit de dmontrer que les sommes partielles vérifient le critère de Cauchy uniforme. Or, comme $||S_{n+m}(x) - S_n(x)|| \leq \sum_{k=n}^{k=+\infty} ||f_n||_\infty$ soit encore pour tout m

$sup_{x\in X}||S_{n+m}(x) - S_n(x)|| \leq \sum_{k=n}^{k=+\infty} ||f_n||_\infty$. Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse, ce qui assure que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy uniformément.

Un exemple

Théorème 13.5 *La série* $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^s}$ *converge uniformément sur les compacts de* $\{s \in \mathbb{C}\, Re(s) > 1\}$.

Démonstration Sur le demi plan défini par $Re(s) > a > 1$ la convergence est normale car $|\frac{1}{n^s}| < \frac{1}{n^a}$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^a}$ convergeant car $a > 1$.

Un exemple Dans le cadre des séries de Fourier,on a :

Théorème 13.6 *La série de Fourier d'une fonction 2π périodique de classe C^1 converge normalement vers cette fonction.*

Démonstration Soit f une fonction 2π périodique de classe C^1. Un résultat établi ci-dessus montre la convergence simple vers f de sa série de Fourier.

f étant de C^1, les coefficients de Fourier vérifient pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{\hat{f'}(n)}{n}$. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure sur la convergence normale.

Théorème 13.7 *Une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.*

De manière équivalente : Si Y est un espace vectoriel complet, l'espace des applications bornées de X dans Y, muni de la norme uniforme, est complet.

Théorème 13.8 *Une limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues convergente uniformément vers f et x un point fixé dans X. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout x et y de X et tout entier n $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y))$ et par majoration $d(f(x), f(y)) \leq d(f_n(x), f_n(y)) + 2sup_{t\in X} d(f_n(t), f(t))$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que $sup_{t\in X} d(f_N(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et on a donc $d(f(x), f(y)) \leq d(f_N(x), f_N(y)) + \frac{\varepsilon}{2}$. La continuité de f_N en x assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que si $d(x, y) \leq \alpha$ $d(f_N(x), f_N(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc si $d(x, y) \leq \alpha$ $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$, ce qui n'est autre que la continuité de f en x.

De manière équivalente : si Y est un espace vectoriel complet, l'espace des applications continues de X dans Y, muni de la norme uniforme est complet ou encore, en référence au théorème précédent, l'espace des fonctions continues bornées est fermé dans l'espace des fonctions bornées.

Voici un énoncé utile en termes de limite en un point adhérent (comme $+\infty$ par exemple !) :

Théorème 13.9 *(de la double limite) : Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications définies sur le sous- espace A de X à valeurs dans Y complet. Soit a un point adhérent à A.*
Si chaque application f_n a une limite λ_n en a et si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers f, la suite $(\lambda_n)_n$ a une limite λ et l'application f a une limite en a égale à λ.

Démonstration On prolonge par continuité les applications f_n en a et on applique le théorème précédent sur $A \cup \{a\}$, les applications prolongées convergent encore uniformément car elles vérifient le critère de Cauchy uniforme car $\sup_{x\in A\cup\{a\}} d(f_n(x), f_m(x)) = \sup_{x\in A} d(f_n(x), f_m(x)) =$ car les fonctions f_n et f_m sont continues.

13.3 Exemples

(a) Un calcul de limite :
$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=+\infty} \exp(-k^2 x) = 0$ car la série converge normalement sur$[1, +\infty[$ et chaque fonction converge vers 0 en $+\infty$.

(b) Fonctions réglées

Rappelons qu'une fonction réglée sur un intervalle est une fonction qui possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche. Le sfonctions continues, les fonctiosn monotones et les fonctions en escalier en sont des exemples immédiats.

Une limite uniforme de fonctions en escalier est réglée comme application du théorème de la double limite (la réciproque est aussi vraie). UNe limite uniforme de fonctions réglées est réglée.

La convergence simple n'est pas suffisante pour assurer la convergence des intégrales ($f_n(t) = nt(1-t^2)^n$ sur $[0, 1]$). Voici un théorème élémentaire mais fondamental et souvent utilisé dans le cadre de la convergence uniforme :

Théorème 13.10 *Si la suite de fonctions intégrables (au sens de...) $(f_n)_n$ converge uniformément sur$[a, b]$ vers f, f est intégrable et la suite des intégrales $\int_a^b f_n(t)\,dt$ converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Démonstration L'assertion dcoule immédiatement de la majoration : $|\int_a^b (f_n(t)-f(t))dt| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$.

Application : Règles de Leibniz

Théorème 13.11 *Soit f une fonction continue sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$.*
La fonction F définie par $F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$ est continue $[a, b]$

Démonstration Fixons un point$x$ de $[a, b]$ et soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers x. La suite $(F_n)_n$ définies par $F_n(y) = f(x_n, y)$ converge, d'après la continuité uniforme de f sur le rectangle uniformément vers la fonction $y \mapsto f(x, y)$, ce qui assure la convergence des intégrales, c'est à dire la continuité de F.

Théorème 13.12 *Si f une fonction de classe C^1 sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy$.*

Démonstration Fixons x. Il s'agit de démontrer que si $(x_n)_n$ converge vers x,
$\dfrac{F(x_n) - F(x) - (x_n - x) \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy}{x_n - x}$ converge vers 0,
c'est à dire que $\displaystyle\int_c^d \frac{f(x_n, y) - f(x, y) - (x_n - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{x_n - x} dy$ converge vers 0. Il suffit donc démontrer que l'intégrande converge uniformément vers 0 sur $[c, d]$.
Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto f(x_n, t) - f(x, t) - (x_n - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ assure la majoration
$|f(x_n, y) - f(x, y) - (x_n - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \leq |x_n - x| \sup_{t \in (x_n, x)} |\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)|$.
Il en découle la majoration uniforme sur $[c, d]$

$$|\frac{f(x_n, y) - f(x, y) - (x_n - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{x_n - x}| \leq \sup_y \sup_{t \in (x_n, x)} |\frac{\partial f}{\partial x}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)|.$$

La continuité uniforme de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur le rectangle assure que cette dernière quantité tend vers 0 si n tend vers l'infini (rappel $(x_n)_n$ tend vers x).

Application : Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème 13.13 *Si f une fonction continue sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ $\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)dx \Big) dy$*

Démonstration Soient les fonctions A et B définies sur $[a, b]$ par $A(x) = \int_a^x F(t)dt$ *et*B(x)=$\int_c^d \Big(\int_a^x f(t, y)dt \Big) dy$.
A désigne la primitive de F nulle en a donc est dérivable de dérivée $F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$.
B estd érivable d'après la règle de Leibniz appliquée à la fonction continue, dérivable par rapport à x $(t, y) \mapsto \int_a^x f(t, y)dt$ de dérivée $\int_c^d f(x, y)dy$.
A et B ayant la même dérivée et coïncidant en a sont identiques, d'où le résultat en b.

La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'assure pas la dérivabilité de la limite ($f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ par exemple). Le théorème positif est :

Théorème 13.14 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables sur $[a, b]$ à valeurs dans l'espace complet X telles que la suite $(f_n')_n$ des dérivées converge uniformément sur [a, b] vers une fonction g et telle que la suite $(f_n(a))_n$ converge. Alors, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur [a, b] vers une fonction dérivable dont la dérivée est g.*

Application : Intégration termes termes des séries entières (exemple $\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{n=+} \frac{t^n}{n}$ $|t| < 1$).

Démonstration Le cas des fonctions de classe C^1 est une application immédiate (laissée au lecteur) du théorème précédent, en utilisant qu'une fonction est l'intégrale de sa dérivée.

Dans le cas général, la suite de fonctions $h_n = f_n - f_n(a)$ converge uniformément sur [a, b] car elle vérifie le critère de Cauchy uniforme. En effet, d'après le théorème des accroissements finis : $\|h_n(t) - h_m(t)\| \leq (b-a)\|f_n' - f_m'\|_\infty$ pour tout t de $[a, b]$ soit encore $\|f_n(t) - f_m(t)\|_\infty \leq (b-a)\|f_n' - f_m'\|_\infty$. La converge uniforme est ainsi établie.

Pour établir la différentiabilité au point x, introduisons la suite des fonctions continues sur l'intervalle [a, b] définies par $\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$ si $t \neq x$ et $\varphi_n(x) = f_n'(x)$. Cette suite converge simplement vers φ définie par $\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ si $t \neq x$ et $\varphi(x) = f'(x)$. Elle converge aussi uniformément sur [a, b] car elle vérifie le critère de Cauchy uniforme d'après le théorème des accroissements finis comme précédemment. Cette fonction φ est donc continue en x, c'est à dire que f est dérivable en x.

Ce résultat se généralise en :

Théorème 13.15 *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de classe C^1 sur l'ouvert connexe D de l'espace normé X de dimension finie à valeurs dans l'espace de Banach Y telles que la suite des dérivés $(Df_n)_n$ converge uniformément sur chaque boule fermée incluse dans D vers une application g et telles que la suite $(f_n(a))_n$ converge.*

Sous ces hypothèses,la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur toute boule fermée incluse dans D vers une application différentiable dont l'application dérivée est g.

-Application : Fonction ζ (en réel) :

Théorème 13.16 *La série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{P}= \{s \in \mathbb{C}\, Re(s) > 1\}$ et définit une fonction de classe C^∞, notée ζ.*

Démonstration Sur le demi plan défini par $Re(s) > a > 1$ la convergence est normale car $|\frac{1}{n^s}| < \frac{1}{n^a}$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^a}$ convergeant car $a > 1$. Il en est de même des séries des dérivées.

Théorème 13.17 *La série $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et sa somme est* $\left(\frac{\pi}{(\sin(\pi x)}\right)^2$.

Démonstration La convergence ne pose aucune difficulté car il y a convergence normale sur tout compac de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. La suite de fonctions $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{1}{x-n}$ convergeant uniformément sur les compacts, le théorême assure que sa somme est dérivable de dérivée $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$. Comme $(S_N)_N$ converge vers la cotangente on peut conclure en dérivant cette dernière fonction.

Application $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

On a $\left(\frac{\pi}{(\sin(\pi x)}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{(x-n)^2+(x+n)^2}$. En faisant tendre x vers 0, on obtient à droite $2\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}$ et à gauche $\frac{\pi^2}{3}$.

Dans le cas des fonctions holomorphes, on a :

Théorème 13.18 *(Théorème de Weierstrass) Une limite uniforme sur chaque compact de fonctions holomorphes sur un ouvert est holomorphe sur cet ouvert et la suite des dérivées d'ordre k converge vers la dérivée k-ième de la limite uniformément sur chaque compact.*

Les deux derniers exemples ci-dessus peuvent (et doivent) se traiter dans le cadre des fonctions holomorphes.

13.4 Convergence dans L^1

Le thorème " roi " pour la convergence dans les intégrales est celui de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 13.19 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur X convergeant simplement vers f . Si il existe une fonction intégrable M telle que $|f_n| \leq M$, la suite $(f_n)_n$ converge dans L^1, c'est à dire : f est intégrable et $\lim_n \int_X |f_n(x) - f(x)|dx = 0$.*
En particulier $\lim_n \int_X f_n(x)dx = \int_X f(x)dx.$

- Exemples
- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n dt = 1.$
La suite de fonctions positive$f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n 1_{[0,n]}(t)$ converge simplement vers $\exp(t)1_{[0,+\infty[]}(t)$ et est majorée par cette même dernière fonction.
- $\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^n (1-\frac{t^2}{n})^n dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt.$
La suite de fonctions positive$f_n(t) = (1-\frac{t^2}{n})^n 1_{[-n,n]}(t)$ converge simplement vers $\exp(-t^2)$ et est majorée par cette même dernière fonction car $\ln(1-u) \leq u$ pour $0 < u < 1$.

-$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{2\pi}.$
En faisaint le changement de variable $t = u\sqrt{n}$ on obtient : $\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n dt = \sqrt{n}\int_{-1}^{1} ((1-u^2)^n du$
Un nouveau changement de variable $u = \cos(x)$ conduit à $\int_0^\pi \sin^{2n+1}(u)du$ que nous savons être équivalent (Stirling par Wallis) à $\sqrt{2\pi/n}$.

14 Relations entre les diverses convergences

Il est important de savoir s'il est possible de passer d'une convergence à l'autre. Le cas le plus simple est donné par la proposition suivante :

Théorème 14.1 *La convergence uniforme entraine la convergence simple.*

La réciproque est fausse : $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$ mais non uniformément car $(f_n(\frac{1}{n}))_n$ tend vers 1.

Toutefois, il est intéressant de connaître des situations où la convergence simple permet de conserver une propriété. Voici quelques exemples importants :

14.1 Monotonie

Dans le contexte de l'étude des suites numériques, la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ apporte des renseignements plus précis. Il est donc naturel de rechercher ce que l'ordre amène dans l'étude des suites d'applications. Il y a deux situationsà étudier : le cas des suites croissantes d'applications et le cas des fonctions numériques croissantes. Ces résultats fournissent des exemples de convergence uniforme.

Théorème 14.2 *(Dini) Toute une suite croissante d'applications continues sur un espace compact K à valeurs réelles convergente vers une application continue converge uniformément.*

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite croissante d'applications continues deK dans R convergente vers une application continue f. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour chaque entier naturel n, introduisons $K_n = \{f - f_n \geq \varepsilon\}$. Comme l'application $f_n - f$ est continue sur K, K_n est fermé. La croissance de la suite entraine que ces ensembles forment une suite décroissante. La convergence simple de la suite $(f_n)_n$ vers f assure que l'intersection de ces ensembles est vide. Par conséquent, K étant compact, il existe un entier m tel que K_n est vide si $n \geq m$. On a donc $(f - f_n)(x) \leq \varepsilon$ pour tout x de K et tout $n \geq m$, c'est à dire qu'il y a convergence uniforme.

Théorème 14.3 *(Dini) Toute suite de fonctions croissantes et continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ convergente vers une fonction continue f converge uniformé ment.*

Démonstration Faisons remarquer que f est aussi une fonction croissante comme limite de fonctions croissantes. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. f étant continue, il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_M$ telle que pour $f(a_{j+1}) - f(a_j) < \varepsilon$. De la convergence, pour chaque entier $j <\leq M$ de la suite $(f_n(a_j))_n$, il découle qu'il existe un entier N tel que pour $j \leq M$ et et tout $n \geq N$ $f_n(a_j) - f(a_j) \leq \varepsilon$.
En utilisant la croissance des fonctions, nous obtenons pour x dans et tout entier $n \geq N$. Il en découle successivement : $-\varepsilon + f(a_j) - f(x) \leq f_n(x) - f(x) \leq f(a_{j+1}) - f(x) + \varepsilon$
$-\varepsilon + f(a_j) - f(a_{j+1}) \leq f_n(x) - f(x) \leq f(a_{j+1}) - f(a_j) + \varepsilon$.
Par conséquent, pour x de $[a_j, a_{j+1}]$ et $n \geq N$: $-2\varepsilon \leq f_n(x) - f(x) \leq 2\varepsilon$.
D'où il découle pour tout entier $n \geq N$: $\sup_{[a,b]} |f_n - f| \leq 2\varepsilon$, ce qui n'est autre que la convergence uniforme.

Exemple : La suite de polynômes définie par la récurrence $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.
A t fixé, cette suite s'étudie comme la suite récurrente associée à la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{2}(t - x^2)$. $[0,1]$ est stable par f et f est croissante. La suite $P_n(t)$ est donc monotone, en fait croissante car $P_0(t) \leq P_1(t)$ convergente vers le point fixe de f à savoir $\sqrt{t}$. Le théorème de Dini assure la convergence uniforme.

Cet exemple peut être utilisé dans la démonstration du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 14.4 *(Beppo Levi ou convergence monotone) : Soit $(f_n)_n$ une suite croissante (i.e. $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions positives intégrables convergente simplement vers la fonction f.*
Sous ces conditions $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$

14.2 Convexité

Une limite simple de fonctions convexes sur un intervalle est convexe. Le théorème de Dini permet de préciser cette convergence.

Théorème 14.5 *Toute suite de fonctions convexes sur un intervalle ouvert convergenet simplement vers une fonction converge uniformément sur tout sous-intervalle compact.*

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convexes sur l'intervalle J convergeant simplement vers la fonction f. La convergence simple entraine la convexité de la limite f. Ainsi, chaque fonction considérée est continue sur J.
Fixons un sous-intervalle compact K de J et un point c de $J \setminus K$. Soit la suite de fonctions φ_n définies sur K par $\varphi_n(t) = \dfrac{f_n(t) - f_n(c)}{t - c}$ et φ définie sur K par $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f_n(c)}{t - c}$
D'après la convexité de la fonction f_n, φ_n est croissante et continue sur K ainsi que φ . Le second théorème de Dini s'applique et par conséquent, la suite φ_n converge uniformément sur K. Il en découle aisément que la suite $(f_n)_n$ converge aussi uniformément sur K.

14.3 Théorèmes limites en probabilités

Une autre relation est donnée par :

Proposition 14.1 La convergence dans L^p entraine la convergence en probabilités.

Démonstration Elle repose sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Soit une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires convergente vers X dans L^p . Si λ est un réel positif, on a pour tout entier n : $(\int_X |f - f_n|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \geq \lambda P(|X_n - X| > \lambda)$. Le résultat est maintenant immédiat.

Un résultat plus élaboré donne un lien entre la convergence presque sure et la convergence en probabilité.

Théorème 14.6 *La convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité.*

Démonstration Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ convergente vers X presque sûrement. Introduisons les variables $Y_n = Min(1, |X - X_n|)$. Cette suite positive converge vers 0 presque sûrement et est majorée par 1 ; le théorème de convergence dominée assure qu'elle converge vers 0 dans L^1 , donc en probabilité. Il en est de même pour la suite $(|X - X_n|)_n$.

La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre l'exemple suivant sur $]0, 1]$. Chaque entier n se décomposant de maniére unique sous la forme $n = 2^k + h$, on pose $f_n = 1_{]h2_k,(h+1)2_k]}$. La suite $(f_n)_n$ converge vers 0 dans L^1, donc en probabilité, mais ne converge en aucun point par densité des dyadiques.

Toutefois, il y a une réciproque partielle :

Théorème 14.7 *Toute suite convergente en probabilité vers X admet une sous-suite extraite convergente presque surement vers X.*

Démonstration La convergence en probabilité permet de construire une application σ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que pour tout k : $P(|X_\sigma(k) - X| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$ Les événements $T_n = \cup\{|X_\sigma(k) - X| \geq 2^{-k}\}$ forment une suite décroissante de probabilité inférieure à 2^{-n+1}, si bien que leur intersection N est de probabilité nulle. En dehors de cet événement N, la suite extraite $(X_{\sigma(n)})_n$ ainsi construite converge vers X puisque $\overline{N} = \cup_n \overline{T_n} = \cup_n \cap_{n \leq k} |X_\sigma(k) - X| < 2^{-k}$ et donc si ω n'appartient pas à N, il existe un entier n tel que pour tout entier $k \geq n$ $|X_\sigma(k) - X| < 2^{-n}$ ce qui assure bien la convergence vers 0 de la suite de gauche.

Cinquième partie

Exercices

Exercice 14.3.1 Etudier la convergence des séries de terme général donné par :

(a) $\dfrac{n^n}{n!}$ (d) $\dfrac{(-1)^n \sqrt{n}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n+(-1)^{n+1}}$ (g) $\dfrac{|sin(n)|}{n}$

(b) $\dfrac{n^n}{(2n)!}$ (e) $\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n\log(n)}$ (h) $\exp(-\sqrt{\log(n)})$

(c) $\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ (f) $\dfrac{sin^2(n)}{n}$ (i) $\sin(\pi\sqrt{n^2+4n+1})$

Exercice 14.3.2 Soient trois suites réels vérifiant : $m_n \leq u_n \leq M_n$. Que pensez vous de la convergence de la série de terme général u_n si celles de terme général m_n et M_n convergent ?
Que se passe-t-il si la série de terme général m_n diverge ?

Exercice 14.3.3 * Soit $\sum_n u_n$ une série divergente à termes positifs. Etablir que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.
Appliquer à la série harmonique.

Exercice 14.3.4 * Soit $\sum_n u_n$ une série convergente à termes positifs. Etablir que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{R_n}$ diverge.

Exercice 14.3.5 Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante positive. Etablir que les séries de termes généraux u_n et $2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
Applications : Retrouver les convergence des séries de Riemann et Bertrand. Convergence de $\dfrac{1}{n\ln(n)\{\ln(\ln(n))^a}$?

Exercice 14.3.6 * Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante positive telle $\sum_n u_n$ converge. Etablir : $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$
(Mise sur la voie : examiner tout d'abord $S_{2n} - S_{n+1}$. Que se passe-t-il si la décroissance est omise ?

Exercice 14.3.7 Soit $(u_n)_n$ une suite positive. Etablir les inégalités :
$\underline{lim}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{lim}(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \overline{lim}(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \overline{lim}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
Soit la suite définie par $u_n = 3^{-n}$ si n est pair et $u_n = 5^{-n}$ si n est impair.
Calculer les quantités précédentes pour cette suite.
Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les critères de D'Alembert et de Cauchy ?

Exercice 14.3.8 Démontrer que $\displaystyle\sum_{p=2}^{n=+\infty}(\zeta(p)-1) = 1$.

Exercice 14.3.9 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+...n^2}$.

Exercice 14.3.10 * On rappelle le développement asymptotique $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+o(1)$.

a-Trouver un développement asymptotique simple de $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{2k}$ et $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{2k-1}$.

On fixe deux entiers p et q strictement positifs. On effectue dans la série convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1))^n}{n+1}$ de somme $\ln(2)$ les regroupements successifs de p termes positifs et q termes négatifs soit :
-p premiers termes positifs
-q premiers termes négatifs
-p termes positifs suivants dans les positifs...
b- Calculer v_{2n} et v_{2n+1} (Réponse $v_{2n} = \sum_{np+1}^{(n+1)p} \frac{1}{2k-1}$ et $v_{2n+1} = -\sum_{nq+1}^{(n+1)q} \frac{1}{2k}$).
c- Démontrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme (Réponse $Ln(2) + \frac{1}{2}\ln(\frac{p}{q}))$.

Exercice 14.3.11 a-Vérifier que chaque entier non nul s'écrit de façon unique sous la forme $2^n(2k+1)$ $((n,k) \in \mathbb{N}^2)$.

b-Etudier la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}}$ $(z \in \mathbb{C})$, puis établir que la somme est égale à $\frac{z}{1-z}$.

Exercice 14.3.12 ** Etudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n(\ln n)^\alpha}$$(\alpha > 0)$ (Mise sur la voie : regrouper des termes).

Exercice 14.3.13 Soit $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Etablir l'encadrement : $S_n \leq e \leq S_n + \frac{1}{n.n!}$ puis démontrer que e est irrationnel.
Démontrer** que $\sum_{n=0}^{n=+\infty} 2^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ est irrationnel.

Exercice 14.3.14 (Lemme de Kronecker)** Démontrer que si la série de terme $\frac{u_n}{n}$ converge, la suite de terme général $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_k}{n}$ converge vers 0 (Indication : utiliser la sommation d'Abel).

Exercice 14.3.15 Que dire des suites $\max_X f_n$ et $\inf_X f_n$ si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur l'espace métrique compact X ?

Exercice 14.3.16 Que pouvez-vous dire d'une suite de fonctions polynomiales uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$? Qu'en déduire pour la convergence d'une série entière sur $\mathbb{C}$?

Exercice 14.3.17 Soit$f$ une fonction continue sur le disque unité fermé $\overline{D}$ du plan complexe. Etudier la suite $(f_n)_n$ où la fonction f_n est définie par $f_n(z) = f((1-\frac{1}{n})z))$.

Exercice 14.3.18 Que pouvez-vous dire de la suite $(f_n(x_n))_n$ si la suite d'applications continues $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers f et la suite $(x_n)_n$ vers x dans X ?

Exercice 14.3.19 Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2+n}$ converge sur $\mathbb{R}$ non absolument mais uniformément.

Exercice 14.3.20 Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^n}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$ et déterminer les parties sur lesquelles il y a convergence uniforme.

Exercice 14.3.21 * Soit la suite $(f_n)_n$ de terme général $f_n(x) = x^{2n+1}\ln(x)$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
a-Etudier la continuité de f_n sur $[0, +\infty[$.
b-Etablir la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n$ sur $[0, 1]$ et $[0, a]$ ($a < 1$).
c-Justifier pour $a < 1$ $\displaystyle\int_0^a \frac{x\ln(x)}{1-x^2}\,dx = -\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{a^{2n+3}}{(2n+2)^2} - \sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{a^{2n+2}\ln(a)}{2n+2}$.
d-Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$.
e-Retrouver la valeur de l'intégrale précédente de manière directe en utilisant la théorie de l'intégration de Lebesgue.
f-Comparer les deux méthodes. Conclusion ?

Exercice 14.3.22 Etudier la convergence de la série $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$. Démontrer que la somme est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer g'. Calculer la limite de g en $+\infty$ puis en déduire l'expression de g.

Exercice 14.3.23 * a-Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sin(nx)}{n}$. Soit S sa somme
b-En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,dt$ démontrer $S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2}\,dt$ (Indication : Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=N} e^{inx}t^{n-1}$ et en déduire que la partie imaginaire est majorée indépendemment de N).
c-Démontrer $S(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.
d-Reprendre l'étude de la convergence et le calcul de la somme à partir de la théorie des séries de Fourier.
e-Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 14.3.24 Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} xe^{-(2n+1)x}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sinh(x)}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 14.3.25 a-Etudier la convergence de $S(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\Big)$ $x \in \mathbb{R}$. Préciser le type de convergence.
b-Calculer la dérivée de S puis déterminer S.

Exercice 14.3.26 Etudier les ensembles de définition, la continuité, la dérivabilité des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{n+n^2(x-n)^2}$.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la première série.

Exercice 14.3.27 Démontrer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{e^t-1}\,dt == \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 14.3.28 *On se propose d'étudier la suite $(u_n)_n$ définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ avec $0 < u_0 < 1$.
a-Démontrer sa convergence et caculer la limite.
b-Démontrer la convergence de la série de terme gnéral u_{nn}^2.
c-Démontrer que les séries de termes génréraux $\ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ et u_n divergent.
d-Déterminer σ tel que la série de terme général $u_{n+1}^\sigma - u_n^\sigma$ diverge.
e-Trouver un équivalent de u_n.