UE Algèbre 1 semestre 3

Contenus :

1. Rappel sur les espaces vectoriels : Définition, bases, coordonnées par rapport à une base, changement de bases, applications linéaires, matrices. Opérations sur les matrices. Systèmes linéaires et pivot de Gauss. Le cas particulier des systèmes homogènes.

2. Dimension : théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite, cardinal d'une base.

3. Somme de sous-espaces, espaces en somme directe, décomposition en somme directe,supplémentaire.Famille finie de sous-espaces en somme directe.

4. Applications linéaires, rang, noyau, image, le théorème du rang. Isomorphismes. L'isomorphisme entre L(E , F) et Mn,m(K) associé à une paire de bases. Le sous-ensemble GL(E) de L(E, E). Noyau d'une application linéaire et systèmes linéaires homogènes. La matrice d'une composition de deux applications linéaires.

5. Le groupe Sn. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints. Signature.

6. Déterminants. Définition (en utilisant les permutations). Règles de calcul. La multiplicativité du déterminant. Le rang d'une matrice comme ordre maximal d'un mineur non-nul. Interprétation géométrique de la valeur absolue du déterminant. Matrices inversibles et le calcul de l'inverse. Le sous-ensemble GL(n, K) de Mn,n(K). Matrices semblables.

7. Endomorphismes. Définition. Le déterminant et la trace d'un endomorphisme.

8. Polynômes. Division euclidienne dans K[X]. Divisibilité par X − a. La multiplicité d'une racine. Théorème de d'Alembert (énoncé). Tout polynôme à coefficients complexes de degré strictement positif est scindé dans C. La notion de polynôme à coefficients réels scindé dans R.

9. Valeurs et vecteurs propres. Sous-espaces propres. Les sous-espaces propres sont en somme directe. Polynôme caractéristique. Multiplicité algébrique et multiplicité géométrique d'une valeur propre. Critères de diagonalisabilité et méthode de diagonalisation.

10. Trigonalisation (le cas réel et le cas complexe). Théorème de Cayley-Hamilton.

Pré-requis : Algèbre linéaire semestre 2